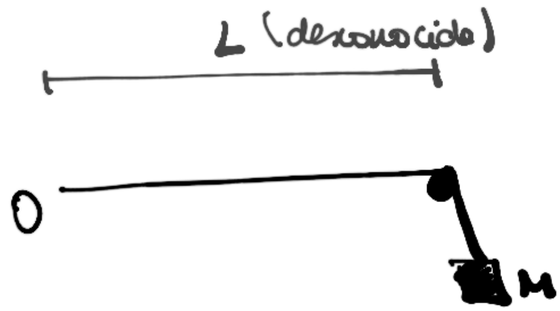
Pauta Aux 4

P1)

Tenemos:



donde la densidad lineal de la cuerda es de $\rho = \frac{1\,gr}{1\,m}$

$$\boxed{\rho = 10^{-3}\,\frac{Kg}{m}}$$

a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la cuerda?

- En una cuerda, siempre su velocidad de propagación es

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

En este caso la tensión T, tiene valor Mg, ya que

$$\left\{ M\cancel{a_y}^{\,0} = T - Mg \right.$$

$$\boxed{T = Mg}$$

luego $v_p = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$

y nos dicen que $Mg = 10\ N$

$$\Longrightarrow v_p = \sqrt{\frac{10\ (N)}{10^{-3}\ \frac{kg}{m}}}$$

$$N = \frac{kg\,m}{s^2}$$

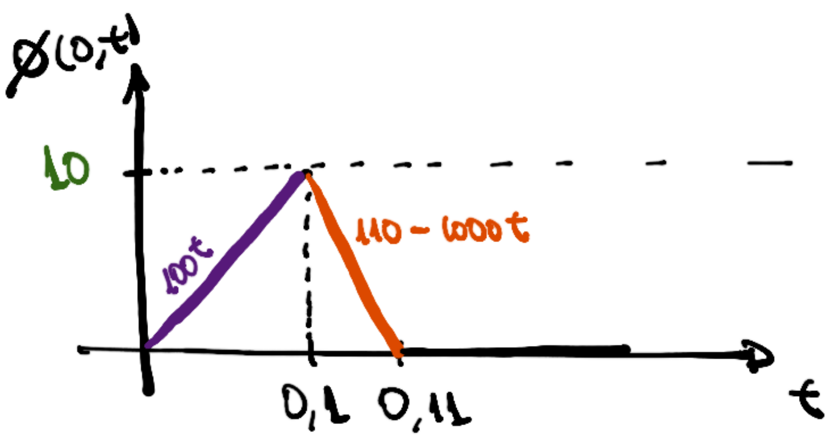
$$= \sqrt{\frac{10\ \frac{kg\,m}{s}}{10^{-3}\ \frac{kg}{m}}}$$

$$= \sqrt{10^4\ m^2/s^2}$$

$$\boxed{v_p = 100\ m/s}$$

b) Dibujo de $\phi(0,t)$

Nos dicen que $$\phi(0,t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 100t & 0 \le t \le 0{,}1 \\ 110 - 1000t & 0{,}1 \le t \le 0{,}11 \\ 0 & t > 0{,}11 \end{cases}$$



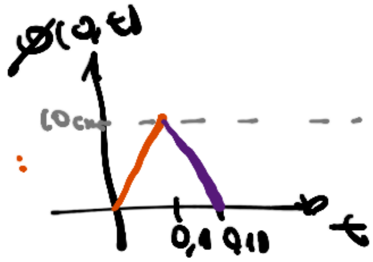
posición de O en el tiempo.

c) Dibujo para $t = 0,1\ s$

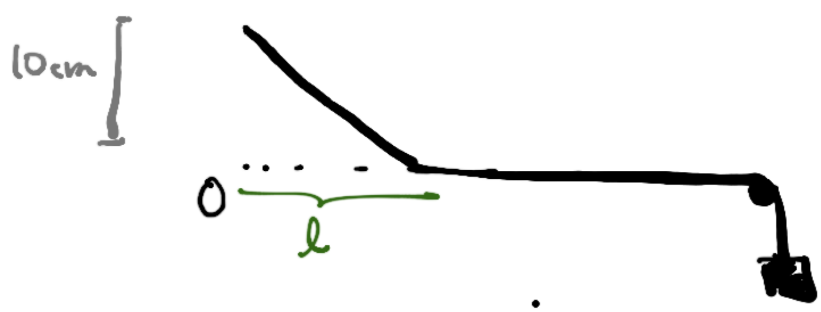
$t = 0,2\ s$

Notemos que el dibujo anterior, es la posición en función del tiempo de el primer punto de la cuerda. Como la onda se propaga, los puntos siguientes van a copiarle lo que haga el primer punto.

$\Rightarrow$ en $t = 0,1$, vemos el gráfico:



hasta 0,1 el primer punto solo sube hasta 10 cm:



Solo debemos saber cuanto vale l, que será la distancia desde el primer punto hasta el último que la onda se ha propagado

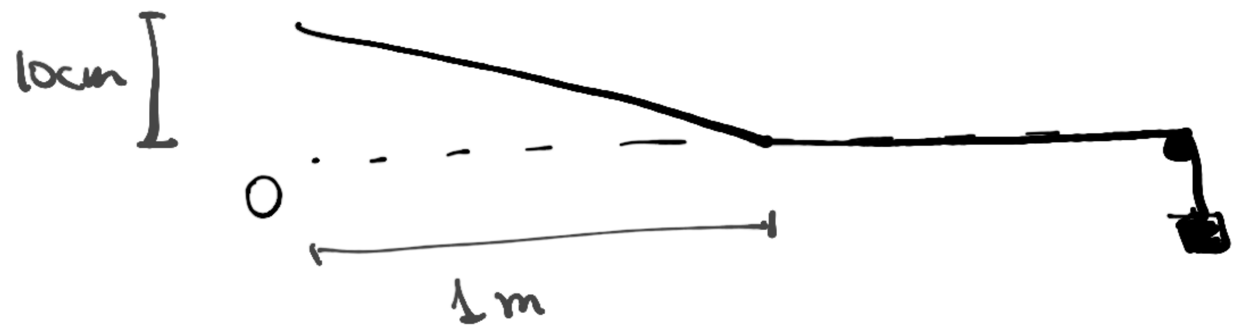
$\Rightarrow$ como ha pasado 0,1 seg y la velocidad de la onda es 10 m/s

$l = v_p \cdot t$

$= 10 \frac{m}{s} \cdot 0,1 \text{ seg}$

$= 1m$

luego en $t=0,1$:



Para $t = 0,2$ seg el primer punto ya hizo el movimiento completo $\Rightarrow$ se está propagando una onda tipo ,

para saber donde está el punto más de adelante $= v_p \cdot t =$

$= 10 \frac{m}{s} \cdot 0,2 \text{ seg}$

$= 2m$

d) Velocidad transversal:

La velocidad transversal es: $\frac{\partial \phi}{\partial t}$

$\Rightarrow$ Luego para el punto inicial: como $\phi(0,t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 100t & t \leq 0{,}1 \\ 110 - 1000t & t \leq 0{,}11 \\ 0 & t > 0{,}1 \end{cases}$

$$\frac{\partial \phi(0,t)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 100 & t \leq 0{,}1 \\ -1000 & t \leq 0{,}11 \\ 0 & t > 0{,}11 \end{cases}$$

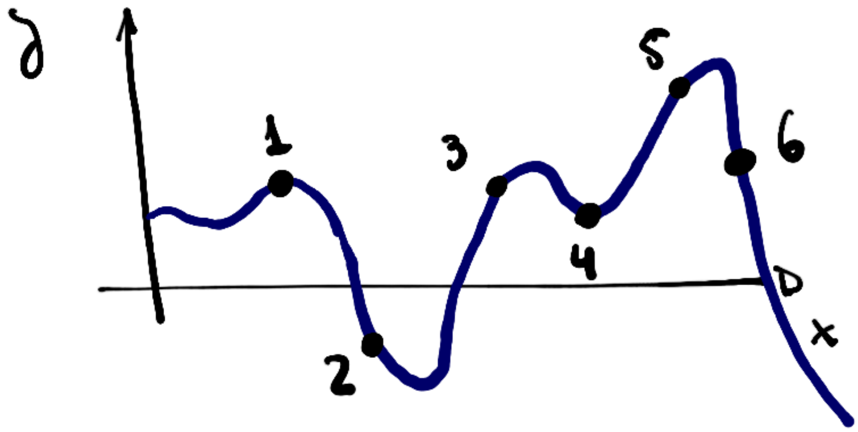
$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \begin{cases} 0 & t < x/v_p \\ 100 & t \leq x/v_p + 0{,}1 \\ -1000 & t \leq x/v_p + 0{,}11 \\ 0 & t > x/v_p + 0{,}11 \end{cases}$$

tiempo en que demora en llegar el pulso a x.

e) Si fuese un pulso sinusoidal la velocidad de propagación sería igual, cambiaría aun dibujo sinusoidal la cuerda, y las velocidades transversales no serían números constantes como 1000 o -1000, sino que funciones cosenos.

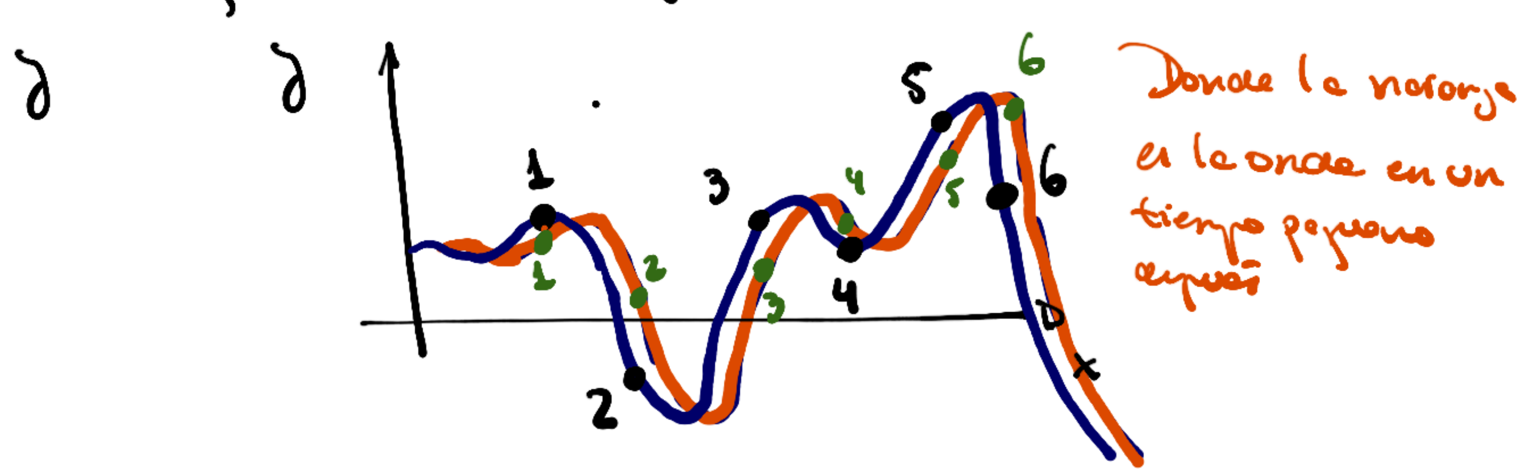
P2)

Tenemos el dibujo:



a) Recordemos que la velocidad transversal es la velocidad del movimiento hacia arriba y abajo que hacen los puntos de la onda.

Notemos que la onda viaja hacia la derecha:



Los puntos • son dónde estarán 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

en un tiempo pequeño después.

Vemos que ① bajó → dirección de la velocidad ↓

② subió → " " " ↑

③ bajó → " " " ↓

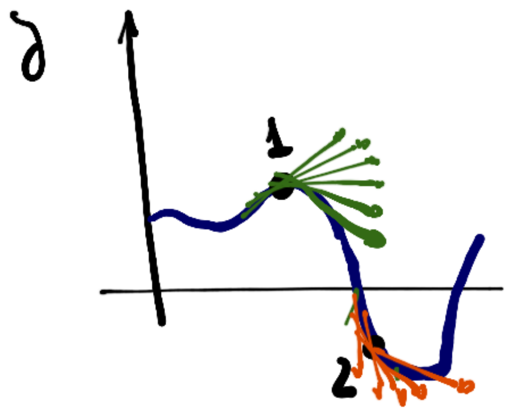
④ subió → " " " ↑

⑤ bajó → " " " ↓

⑥ subió → " " " ↑

b) aceleración transversal, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

Para ver la dirección de la aceleración transversal notemos que tiene el mismo valor que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ excepto por una constante positiva, luego analizamos la concavidad de cada punto, por ejemplo 1:



Se puede ver que las pendientes comienzan a disminuir

$\longrightarrow$ aceleración negativa

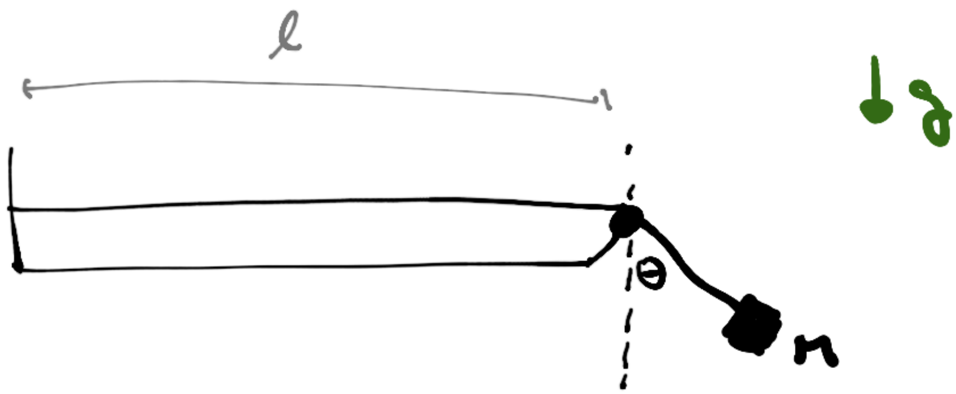
Para 2 en cambio comienzan a elevarse

$\Longrightarrow$ aceleración positiva

c) si se propaga se en $-x$, solamente cambiaría el signo de la dirección de las velocidades, ya que iría al revez. El de la aceleración continuaría igual ya que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$.

P3)

a)



Queremos la velocidad de propagación del pulso para θ_{MAX} y $\theta = 0$

Sabemos que en una cuerda:

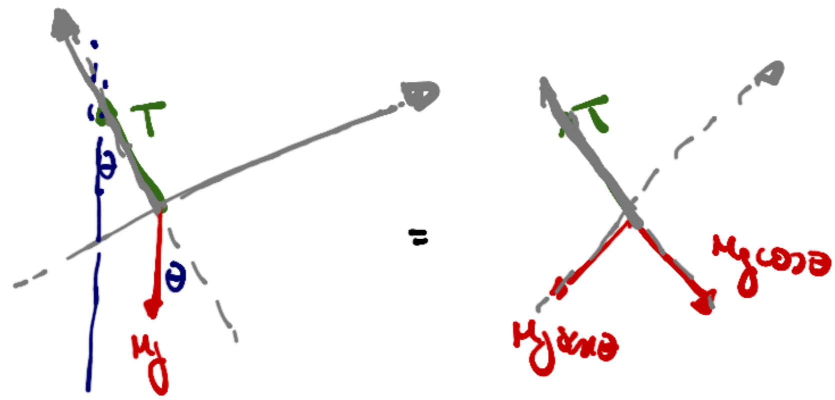
$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

→ densidad de la cuerda

$$\mu = \frac{m}{L}$$

Obtenemos la tensión:

si ponemos un sistema de referencia tangencial, radial:



donde notemos que T indica hacia el centro del péndulo,

y tendremos un mov. circular

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} M a_{centripeta} &= T - Mg\cos\theta \\ M a_{tangencial} &= -Mg\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}}$$

$$M a_c = T - Mg\cos\theta \quad ; \quad M a_t = -Mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{M \cdot \frac{v_t^2}{R} = T - Mg\cos\theta} \qquad \boxed{a_t = -g\,\text{sen}\,\theta}$$

v_t = velocidad tangencial del péndulo

Cuando θ_{MAX}, notemos que se parte del reposo

$\Longrightarrow V_t = 0$

porque $T = Mg\cos\theta_{MAX}$

$$\longrightarrow V = \sqrt{\frac{Mg\cos\theta_{MAX}}{m/L}}$$

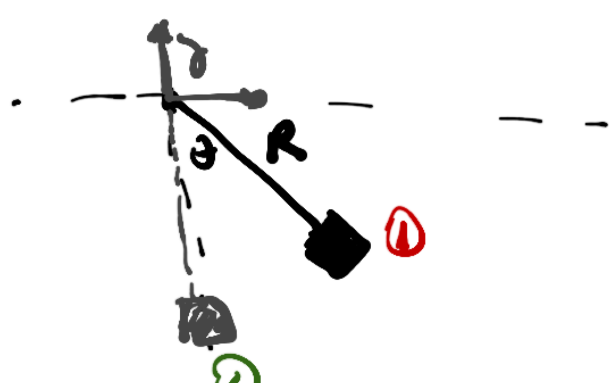
$$V = \sqrt{Lg\cos\theta_{MAX}\,\frac{M}{m}}$$

cuando $\theta = 0$

$$\frac{MV_t^2}{R} = T - Mg\,\cancel{\cos\theta}^{\,1}$$

$$T = Mg + \frac{MV_t^2}{R}$$

hay que determinar V_t^2, para ello usamos cons. energía:



$E_1 = U_1 + \cancel{K_1}^{0}$

$= -MgR\cos\theta$

$E_2 = U_2 + K_2$

$= -MgR + \frac{M v_t^2}{2}$

igualando $\quad -\cancel{M}gR\cos\theta = -\cancel{M}gR + \frac{\cancel{M} v_t^2}{2}$

$$\boxed{2gR(1-\cos\theta) = v_t^2}$$

luego $\quad a_c = \frac{v_t^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow \quad T = Mg + M\frac{v_t^2}{R}$

$= Mg + M \cdot 2g(1-\cos\theta)$

$T = Mg(3-2\cos\theta)$ (Donde $\theta = \theta_{max}$)

$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{m/L}} = \sqrt{\frac{Mg(3-\cos\theta)}{m/L}}$

$$\boxed{v = \sqrt{Lg(3-\cos\theta)\frac{M}{m}}}$$

b) Tenemos $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

tomemos $y(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f'(x+vt) \cdot v + g'(x-vt) \cdot v$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(x+vt) v^2 + g''(x-vt) v^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x+vt) + g'(x-vt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x+vt) + g''(x-vt)$$

Colocando esto en la ec. de onda queda:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$f''(x+vt)v^2 + g''(x-vt)v^2 = v^2\left(f''(x+vt) + g''(x-vt) \right.$$

es lo mismo en ambos lados!!

Luego la solución de la ec. de onda es

esta: $f(x+vt) + g(x-ct)$ ✓