Pauta T2 P5: Cambio de Medio

Considere la situación en que una cuerda cambia de densidad lineal en el punto $x = 0$. Es claro que como las densidades son distintas a ambos lados de dicho punto, también lo serán las velocidades de propagación. Llamemos v_1 y v_2 a las velocidades de propagación a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, respectivamente. Suponga ahora que una viajera sinusoidal de amplitud 1 y frecuencia angular ω_0 se acerca desde la izquierda al punto $x = 0$. Tal onda incidente se escribe de la forma

$$y_{\mathrm{I}}(x,t) = \cos(k_1 x - \omega_0 t), \quad k_1 \equiv \frac{\omega_0}{v_1}. \tag{3}$$

Cuando la onda llega al punto de interfase sucede que parte de la onda es transmitida y parte de la onda es reflejada. En el régimen estacionario, las ondas en el lado izquierdo $(-)$ y en el lado derecho $(+)$ serán de la forma

$$y_-(x,t) = \cos(k_1 x - \omega t) + A\cos(k_1 x + \omega_0 t), \quad y_+(x,t) = B\cos(k_2 x - \omega_0 t), \tag{4}$$

donde claramente A y B son las amplitudes de las ondas reflejada $y_{\mathrm{R}}(x,t)$ y transmitida $y_{\mathrm{T}}(x,t)$, respectivamente. Note que la frecuencia de la onda no cambia al pasar de un medio a otro. Lo que cambia es el número de onda, o equivalentemente, la longitud de onda.

- Imponiendo continuidad de la función de onda y su derivada espacial en $x = 0$ encuentre expresiones explícitas para A y B en función de las densidades de masa lineal μ_1 y μ_2. (5 puntos)

Imponemos 2 condiciones:

(i) $y_-(x=0,t) = y_+(x=0,t)$

(ii) $\dfrac{dy_-(x=0,t)}{dx} = \dfrac{dy_+(x=0,t)}{dx}$

Evaluamos ambas condiciones y vemos que tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas

i)

$$y_-(x=0,t) = y_+(x=0,t)$$
$$\cos(-\omega t) + A\cos(\omega t) = B\cos(-\omega t)$$
$$(1+A)\cancel{\cos(\omega t)} = B\cancel{\cos(\omega t)}$$
$$B = 1 + A \quad (1)$$

ii)

$$\frac{dy_-(x=0,t)}{dx} = \frac{dy_+(x=0,t)}{dx}$$

$$-\operatorname{sen}(K_1x-wt)\cdot K_1 + -A\operatorname{sen}(K_1x+wt)\cdot K_1 = -B\operatorname{sen}(K_2x-wt)\cdot K_2$$

$$-K_1\operatorname{sen}(-wt) - AK_1\operatorname{sen}(wt) = -BK_2\operatorname{sen}(-wt)$$

$$K_1\cancel{\operatorname{sen}(wt)}(1-A) = BK_2\cancel{\operatorname{sen}(wt)}$$

$$K_1 - AK_1 = K_2 + AK_2 \quad * (1)$$

$$A(K_1+K_2) = K_1 - K_2$$

$$A = \frac{K_1-K_2}{K_1+K_2}$$

$$\Rightarrow \quad B = 1 + \frac{K_1-K_2}{K_1+K_2} \quad * (1)$$

$$B = \frac{K_1+K_2+K_1-K_2}{K_1+K_2}$$

$$B = \frac{2K_1}{K_1+K_2}$$

Ahora, de enunciado tenemos:

$$K_1 = \frac{w}{V_1}$$

$$K_1 = w\sqrt{\frac{\mu_1}{f}}$$

Y análogo tenemos K_2:

$$K_2 = w\sqrt{\frac{\mu_2}{f}}$$

Reemplazamos en la expresión de A:

$$A = \frac{\frac{\cancel{w}}{\cancel{\sqrt{f}}}\left(\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}\right)}{\frac{\cancel{w}}{\cancel{\sqrt{f}}}\left(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}\right)}$$

* la frecuencia se mantiene

$$A = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} B = \frac{\frac{\cancel{w}}{\cancel{\sqrt{f}}} \cdot 2\sqrt{\mu_1}}{\frac{\cancel{w}}{\cancel{\sqrt{f}}}\left(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}\right)}$$

$$\boxed{\therefore \quad A = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad \wedge \quad B = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}}$$

Utilizando las expresiones encontradas, discuta qué sucede en los siguientes límites:

1. $\mu_1 = \mu_2$. $\quad A = 0 \quad ; \quad B = 1$
2. $\mu_2 \gg \mu_1$. $\quad A < 0 \quad ; \quad B > 0$
3. $\mu_2 \to \infty$. $\quad A = -1 \quad ; \quad B = 0$
4. $\mu_2 \ll \mu_1$. $\quad A > 0 \quad ; \quad B > 0$
5. $\mu_2 = 0$. $\quad A = 1 \quad ; \quad B = 2$

* + Discusiones en cada caso

- Demuestre que la energía (por unidad de tiempo) transportada por la onda reflejada más la energía de la onda transmitida coincide con la energía de la onda incidente.

Basta con demostrar:

$$P_{reflejada} + P_{transmitida} = P_{incidente} \quad (2)$$

Recopilando la información tenemos:

Onda reflejada : $y_R(x,t) = A\cos(K_1 x + wt)$

" transmitida : $y_T(x,t) = B\cos(K_2 x - wt)$

" incidente : $y_i(x,t) = \cos(K_1 x - wt)$

$$\left.\begin{aligned} P_R &= \sqrt{\mu_1 f}\, w^2 A^2 \\ P_T &= \sqrt{\mu_2 f}\, w^2 B^2 \\ P_i &= \sqrt{\mu_1 f}\, w^2 \end{aligned}\right\} \text{Recordamos que la frecuencia se mantiene}$$

Reemplazamos en (2):

$$\begin{aligned} P_{reflejada} + P_{transmitida} &= \sqrt{\mu_1 f}\, w^2 A^2 + \sqrt{\mu_2 f}\, w^2 B^2 \\ &= \sqrt{f}\, w^2 \left(\sqrt{\mu_1} \cdot \left(\frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \right)^2 + \sqrt{\mu_2} \cdot \frac{4\mu_1}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{f}\, w^2}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2} \left(\mu_1\sqrt{\mu_1} - 2\mu_1\sqrt{\mu_2} + \mu_2\sqrt{\mu_1} + 4\mu_1\sqrt{\mu_2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{f}\, w^2}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2} \cdot \left(\mu_1\sqrt{\mu_1} + 2\mu_1\sqrt{\mu_2} + \mu_2\sqrt{\mu_1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{f}\, w^2}{\cancel{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2}} \cdot \sqrt{\mu_1} \cdot \cancel{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2} \\ &= \sqrt{\mu_1 f}\, w^2 \\ &= P_{incidente} \; // \end{aligned}$$

$\therefore$ Se cumple