Pauta Tarea Nº3

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta. **[20 puntos]**

a) La derivada de la función $f(x) = ln(x^4)$ es $f'(x) = \dfrac{4}{x^2}$
Derivando se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3}{x^4} \\ &= \frac{4}{x} \end{aligned}$$

En consecuencia, la afirmación es Falsa.

[10 puntos]

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x^3) - x$ en $x = 1$ es $y = 2x + 3$
Se comienza determinando la componente y de la recta tangente a la curva

$$\begin{aligned} f(1) &= ln(1^3) - 1 \qquad\qquad ln(1) = 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ahora se calcula la pendiente, la cual es definida como la derivada de la función evaluada en el punto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2}{x^3} - 1 \\ &= \frac{3}{x} - 1 \\ f'(1) &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $m = 2$
Ahora se puede determinar la ecuación de la recta tangente a la curva, entonces

$$\begin{aligned} y - y_1 = m(x - x_1) &\Leftrightarrow y - (-1) = 2(x - 1) \\ &\Leftrightarrow y + 1 = 2(x - 1) \\ &\Leftrightarrow y + 1 = 2x - 2 \\ &\Leftrightarrow y = 2x - 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, -1)$ es $y = 2x - 3$. En consecuencia, la afirmación es Falsa.

[10 puntos]

2. Chiloé (ciudad ubicada en la zona sur de Chile) es conocida por poseer unos de los mejores Salmones a nivel mundial. Luego de egresar del MGPP se le da el cargo de Subsecretario de Pesca a nivel nacional. Luego de investigar el mercado del Salmón se da cuenta que China es el país que posee la mayor demanda de Salmón, con una función de demanda dada por: $p = 470 - 0.5x$. Adicionalmente determina que la función de costos está dada por $C(x) = 0.1x^3 - 0.5x^2 + 200x + 1000$. Con estos antecedentes decide determinar: [**40 puntos**]

   a) El óptimo de producción de toneladas de Salmón para exportar a China.

   Sea x: toneladas de Salmón a producir y exportar a China.

   Lo primero es determinar la función de ingreso, que será:

$$\begin{aligned} I(x) &= xp \\ &= x(470 - 0,5x) \\ &= 470x - 0,5x^2 \end{aligned}$$

   Ahora es posible determinar la función de utilidad, entonces

$$\begin{aligned} U(x) &= I(x) - C(x) \\ &= 470x - 0,5x^2 - (0,1x^3 - 0,5x^2 + 200x + 1000) \\ &= 470x - 0,5x^2 - 0,1x^3 + 0,5x^2 - 200x - 1000 \\ &= 270x - 0,1x^3 - 1000 \end{aligned}$$

   El óptimo de producción se determina cuando $U'(x) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} U'(x) = 0 &\Leftrightarrow 270 - 0,3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 270 = 0,3x^2 \\ &\Leftrightarrow 900 = x^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{900} = \sqrt{x^2} \\ &\Leftrightarrow 30 = |x| \\ &\Leftrightarrow x = 30 \quad \vee \quad x = -30 \end{aligned}$$

   No tiene sentido al problema $x = -30$ dado que en un problema de planteo no pueden haber cantidades negativas, por lo tanto, se descarta.

   Sin embargo, para verificar que el óptimo de producción se encuentra cuando $x = 30$ se puede utilizar el criterio de la segunda derivada, esto es

$$\begin{aligned} U''(x) &= -0,6x \\ U''(30) &= -18 \end{aligned}$$

   Dado que $U''(30) = 18 < 0$ entonces se verifica que el óptimo de producción se logra cuando se producen y exportan 30 toneladas de Salmón a China.

   [**10 puntos**]

b) La utilidad máxima que se obtiene al exportar Salmones a China.

Dado que ya se conoce el óptimo de producción, sólo basta con evaluarlo en la función de utilidad.

$$\begin{aligned} U(30) &= 270(30) - 0,1(30)^3 - 1000 \\ &= 4400 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la utilidad máxima que se obtiene por producir y exportar 30 toneldas de Salmón a China es de 4400 unidades monetarias.

[**10 puntos**]

c) Determine el ingreso marginal de la tonelada 21. Interprete.

Primero es necesario determinar el ingreso marginal, que será:

$$I'(x) = 470 - x$$

El costo marginal de la unidad 21 se evalúa para $x = 20$, entonces

$$\begin{aligned} I'(20) &= 470 - 20 \\ &= 450 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es posible decir que el ingreso adicional de producir y exportar la tonelada 21 de Salmón a China es de 450 unidades monetarias.

[**10 puntos**]

d) Es conveniente exportar 101 toneladas de Salmón a China? Argumente.

Esto es posible determinarlo empleando la utilidad marginal y evaluar para $x = 100$

$$\begin{aligned} U'(100) &= 270 - 0,3(100)^2 \\ &= -2730 \end{aligned}$$

Dado que $U'(100)$ es negativo, nos indica que no conviene producir y exportar 101 toneladas de Salmón a China, puesto que al vender esa unidad adicional la utilidad marginal es negativa.

[**10 puntos**]