EL 4004
Fundamentos de Control de Sistemas

Observadores de Estado

Ejercicio Propuesto 1

En el sistema mostrado en la figura anterior se requiere controlar E con cero error en estado estacionario a entrada escalón. Recuerde que las ecuaciones de estado ya fueron obtenidas en las diapositivas anteriores ahora se debe agregar control integral.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & R_1/L_1 & 0 \\ R_1/L_2 & -(R_1+R_2)/L_2 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix}$$

La referencia no afecta la dinámica

Se obtiene por realimentación de estados

Salida del sistema

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix}$$

Ejercicio propuesto

- Se asume $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega, L_1 = 10mH, L_2 = 15mH$.

$$\begin{bmatrix} \dot{i_1} \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 & 0 \\ 666.67 & -1000 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix}$$

Vamos a diseñar utilizando la forma canónica de control ayudado por Matlab.

[num,den]=ss2tf(A,B,C,D) entrega un denominador de $s^3 + 2000s^2 + 3.33x10^5 s$.

Por lo tanto la forma canónica de control es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i_{c1}} \\ i_{c2} \\ X_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & -3.33x10^5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

Son estados “no físicos”

Los polos actuales tienen frecuencias naturales de $[0 \quad -289.1 \quad -29.205]$Hz. Se buscan frecuencias naturales de 150Hz, ζ=0.707 y 150Hz

Ejercicio propuesto

- El nuevo denominador o función característica sería

$$s^3 + 2275.1s^2 + 2.144x10^6 s + 8.3692x10^8$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & -3.33x10^5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix}$$

Debo llegar acá con realimentación de estados

- $$\begin{bmatrix} \dot{i}_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2275 & -2.144x10^6 & -8.3692X10^8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix}$$

- $K_1 = 275.14 \quad K_2 = 1.8107X10^6 \quad K_3 = 8.3692x10^8$.

Ejercicio propuesto

- Recordando la definición de la matriz T tal que $X_c = Tx_f$ es:

- $\mathrm{T} = \mathcal{C}_c\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.015 & -0.001 \\ 0 & -1.5x10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & -3x10^{-6} \end{bmatrix}$. El problema físico con control integral queda:

Kc

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 & 0 \\ 666.67 & -1000 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 275.14 & 1.8107x10^6 & 8.3692x10^8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.01 & 0.015 & -0.001 \\ 0 & -1.5x10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & -3x10^{-6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix}$$

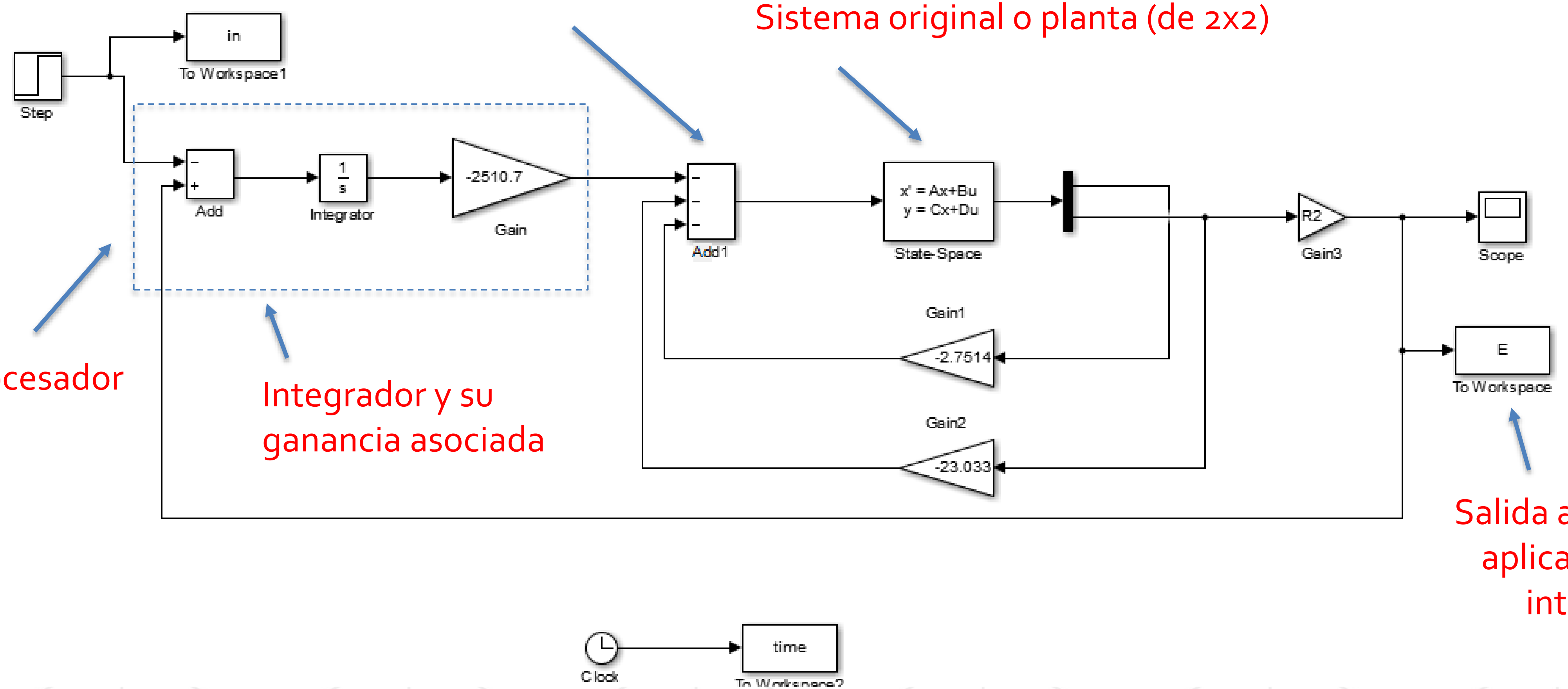
Kf

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 & 0 \\ 666.67 & -1000 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2.7514 & -23.033 & -2511 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix}$$

Implementación del sistema de control incluyendo control integral

Actuador

Sistema original o planta (de 2x2)



En el procesador

Integrador y su ganancia asociada

Salida a la que se aplica control integral

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 5\Omega, L_1 = 10mH, L_2 = 15mH$$

Contenido

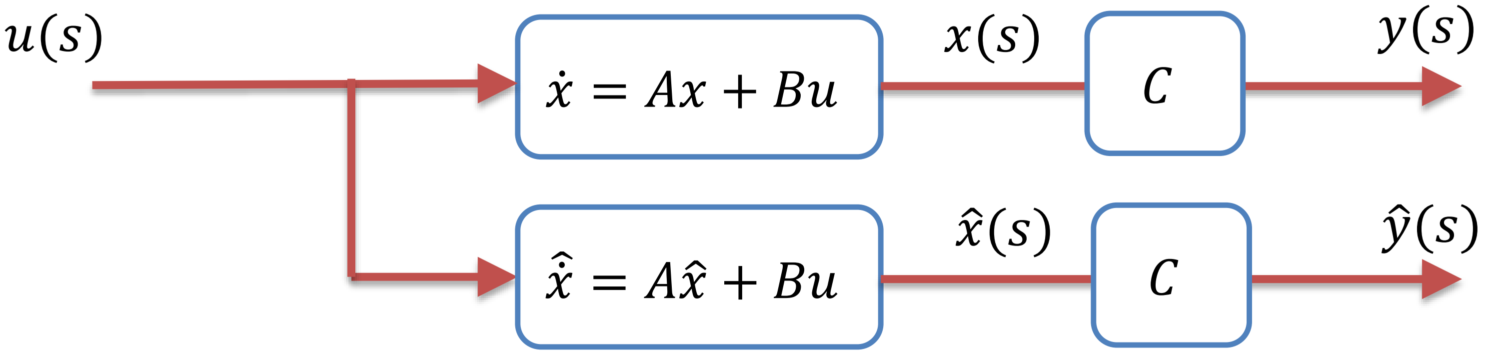
Observadores de Estado

- Para realimentar el sistema se tienen que medir todos los estados del sistema.
- Sin embargo algunos estados no pueden ser medidos:
  - Gran número de sensores instalados.
  - Variables como ángulo y velocidad pueden tener alto ruido.
  - Los sensores son caros.
  - La instalación de los sensores es complicada.
  - Los estados no pueden ser medidos.

- Para esos casos se utilizan estimadores u observadores de estados.
- El observador de estado es una simulación del proceso en el cual las entradas y salidas del proceso entregan una estimación del estado.
- Pueden estimarse todos los estados o solo algunos.

Estimador de Estado Completo

- Lazo Abierto

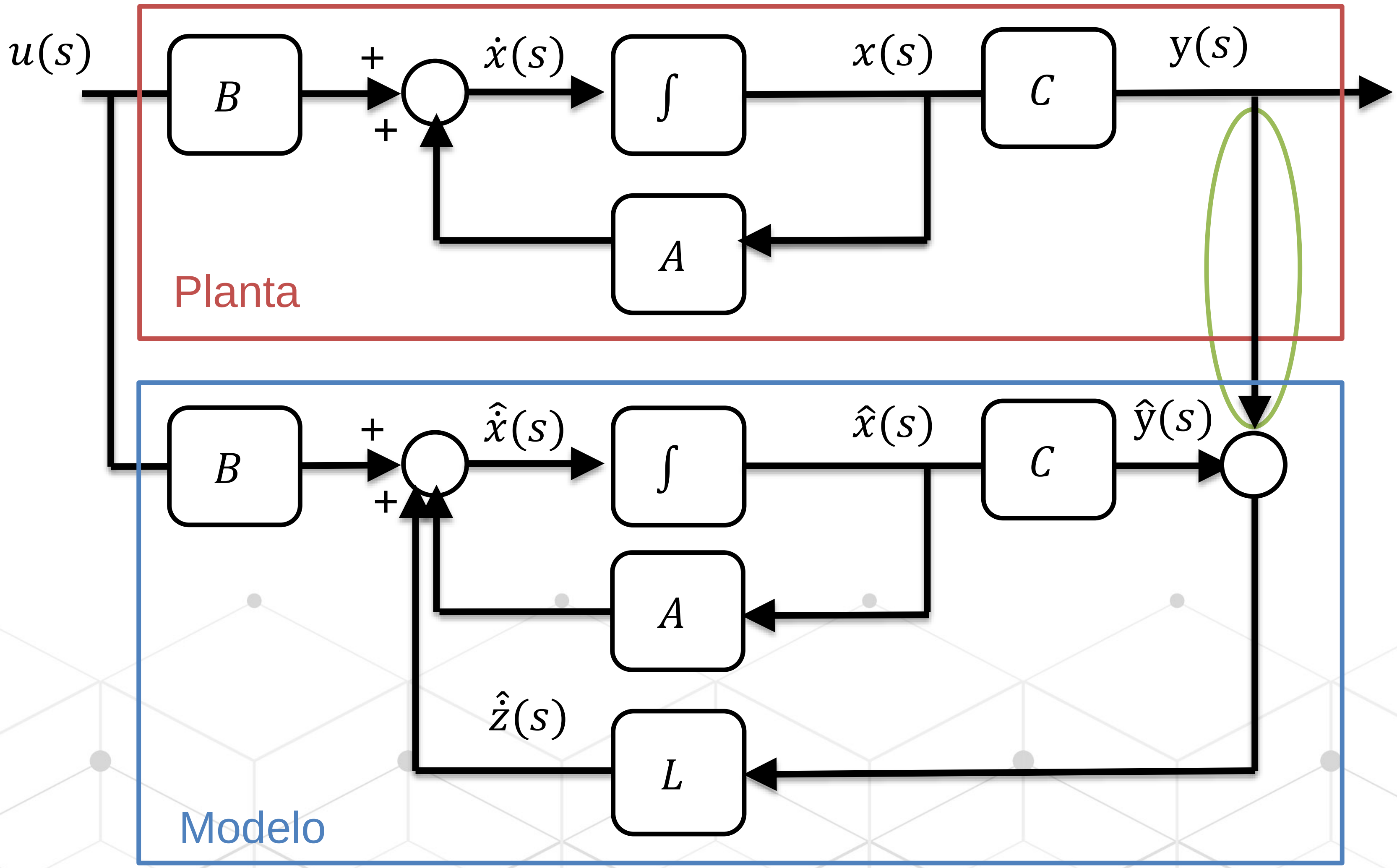


¿Cuándo se considera que el estado aproximado $\hat{x}$ es bueno?

- El estado $\hat{x}$ es igual al estado original x si:
    - Las matrices A, B, C son cercanas a la realidad.
    - No hay incerteza ni perturbaciones en el modelo.
    - Las condiciones iniciales de la planta y el modelo son las mismas.

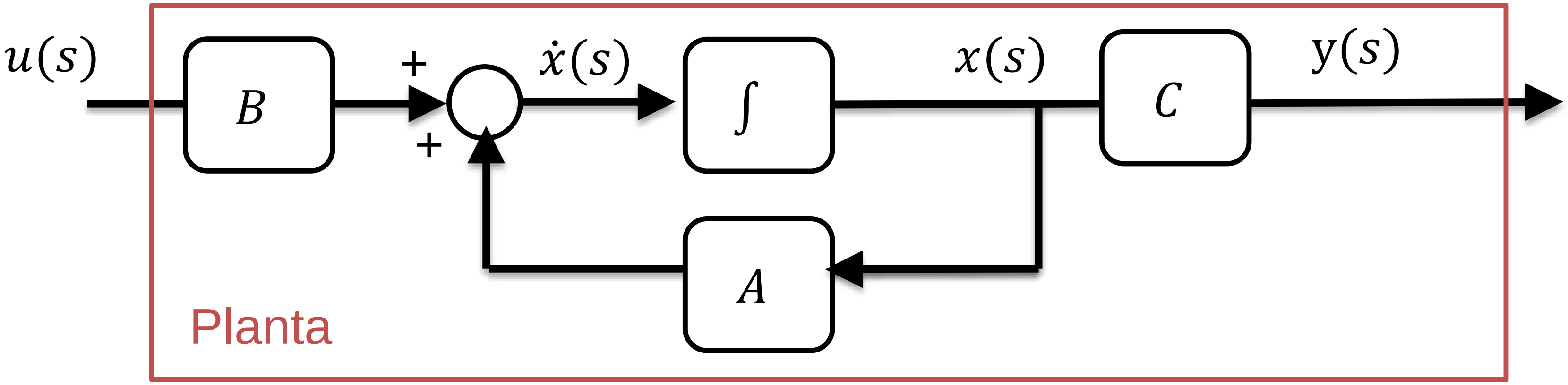
Estimador de Estado Completo

- Lazo Cerrado



Estimador de Estado Completo

- Lazo Cerrado

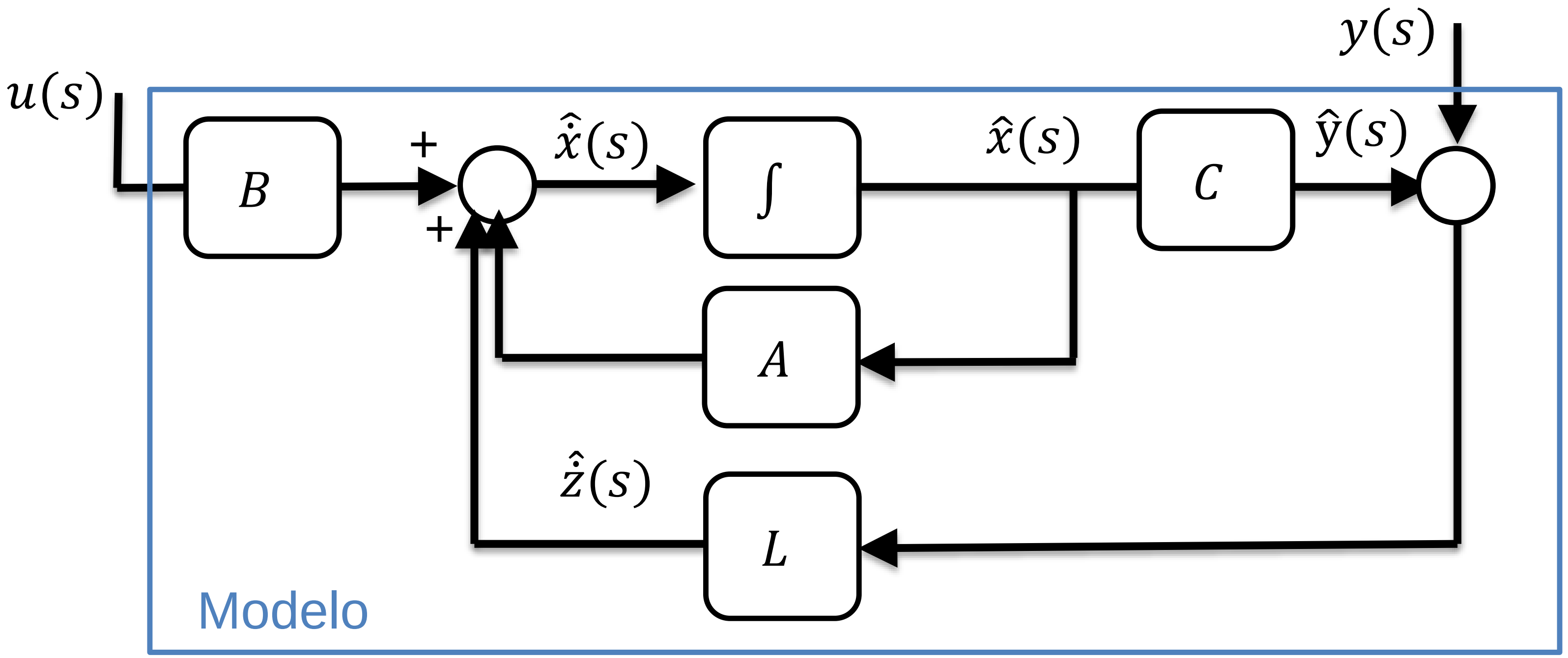


- Ecuaciones de la Planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Estimador de Estado Completo

- Lazo Cerrado

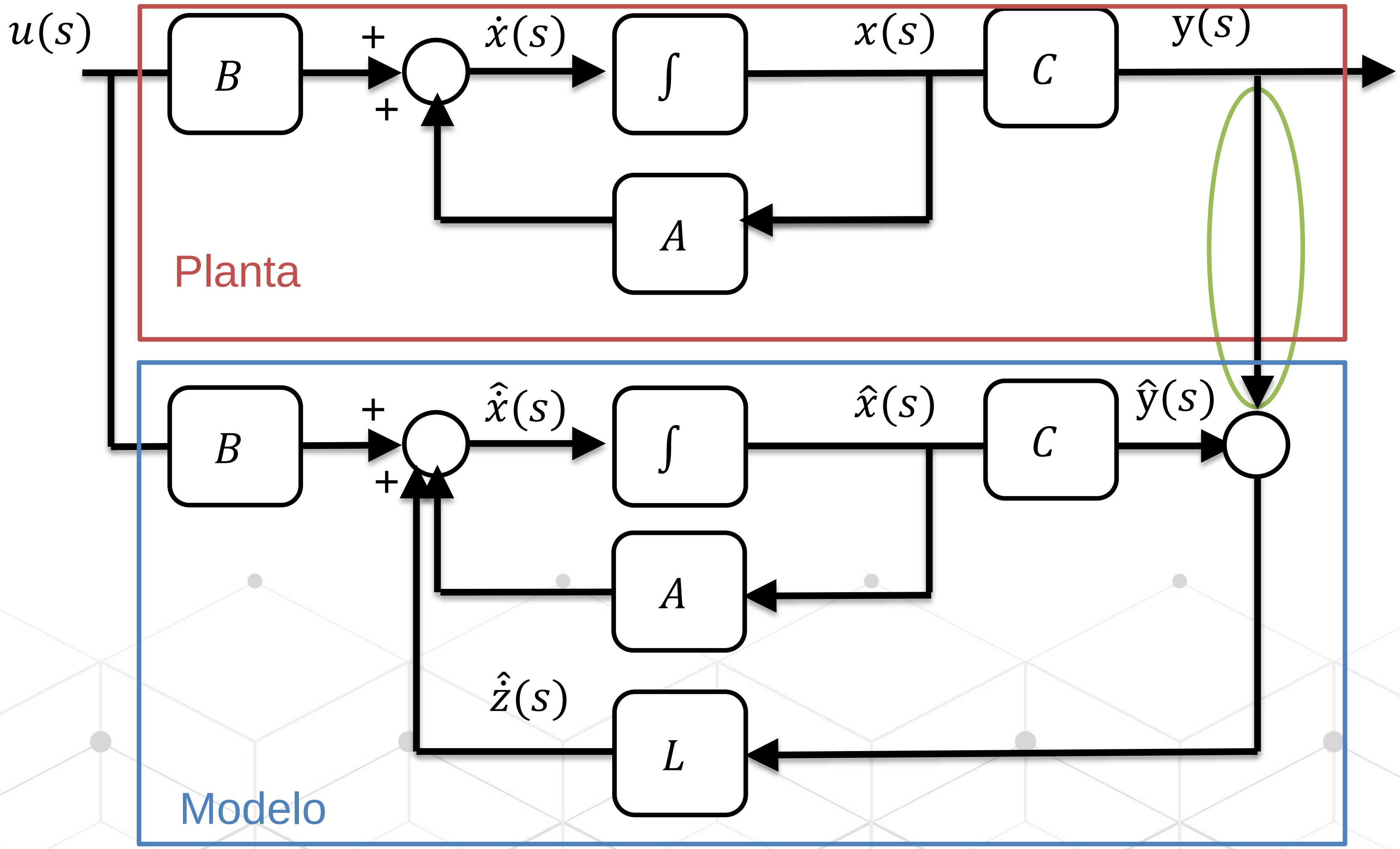


- Ecuaciones del Observador:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = C\hat{x} + Du$$

Estimador de Estado Completo

- Lazo Cerrado



Estimador de Estado Completo

• Ecuaciones Planta	• Ecuaciones Observador
$\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$	$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + L(y - \hat{y})$ $\hat{y} = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u$

- Estados Estimados:

Reemplazando las ecuaciones de la planta en el observador:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + L\left(Cx + Du - \hat{C}\hat{x} - \hat{D}u\right)$$

$$\hat{A} \approx A, \hat{B} \approx B, \hat{C} \approx C, \hat{D} \approx D \Rightarrow \boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + LC(x - \hat{x})}$$

- Error:

La diferencia entre los estados estimados y reales:

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} + Bu - Bu - LC(x - \hat{x})$$

El error es $\tilde{x} = x - \hat{x}$:

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \Rightarrow \boxed{\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}}$$

Estimador de Estado Completo

Ecuaciones del sistema:

$$\dot{\mathrm{x}} - \dot{\hat{\mathrm{x}}} = \mathrm{Ax} - \mathrm{A\hat{x}} - \mathrm{LC}(\mathrm{x} - \hat{\mathrm{x}})$$
$$\dot{\tilde{\mathrm{x}}} = (\mathrm{A} - \mathrm{LC})\tilde{\mathrm{x}}$$

- El error $\tilde{\mathrm{x}}$ tiende a cero $\Rightarrow \tilde{\mathrm{x}} \rightarrow \mathrm{x}$
- Los polos de $(A - LC)$:
  - Determinan que tan rápido el error tiende a cero.
  - Tienen que ser un orden de magnitud mayor que el polo mas rápido del $(A - BK)$.

¿Por qué?

Ejemplo:

Polos en lazo cerrado planta: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -40.$

Los polos del observador podrían estar en: $\lambda_O = -50, -50 \pm j50$

Estimador de Estado Completo - Forma Canónica Observable

- Sistema con una variable de salida.
- Ecuaciones del sistema en forma canónica observable son:

$$\dot{x}_o - \dot{\hat{x}}_o = A_o x_o - A_o \hat{x}_o - L_o C_o (x_o - \hat{x}_o)$$
$$\dot{\tilde{x}}_o = (A_o - L_o C_o)\tilde{x}_o$$

Con:

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & \vdots \\ -a_3 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, C_o = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \dots 0]$$

- Como C_o es de $1xn$, el observador es de $nx1$:

$$L_o = [l_{o1} \;\; l_{o2} \;\; \dots l_{on}]^T$$

Estimador de Estado Completo - Forma Canónica Observable

Luego:

$$\mathrm{L_o C_o} = \begin{bmatrix} l_{o1} \\ l_{o2} \\ \vdots \\ l_{on} \end{bmatrix} [1\ 0\ \ldots 0] = \begin{bmatrix} l_{o1} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{o2} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{on} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A_o} - \mathrm{L_o C_o} = \begin{bmatrix} -a_1 - l_{o1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 - l_{o2} & 0 & 1 & & \vdots \\ -a_3 - l_{o3} & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_n - l_{on} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Donde $a_1 + l_{o1}, \ldots, a_n + l_{on}$ son los coeficientes α_i de la ecuación característica de $(\mathrm{A_o} - \mathrm{L_o C_o})$:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n = (s - \lambda_{o1})(s - \lambda_{o2}) \ldots (s - \lambda_{on})$$

Estimador de Estado Completo - Forma Canónica Observable

Luego:

$$l_{oi} = \alpha_i - a_i$$

$$L_o = \begin{bmatrix} l_{o1} \\ l_{o2} \\ \vdots \\ l_{on} \end{bmatrix}$$

¿Qué estados estamos estimando?

Para obtener la estimación de x:

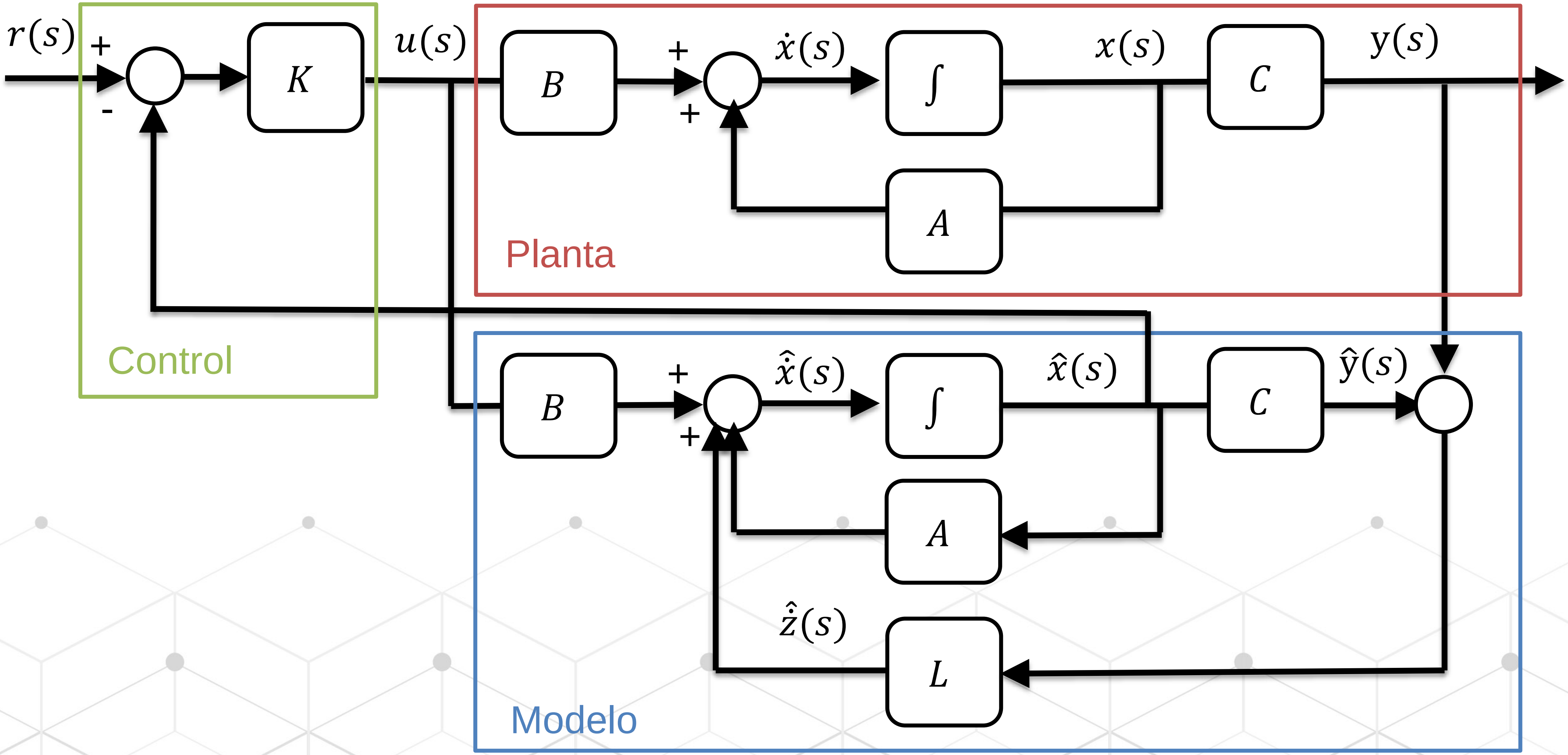
$$L = T^{-1} L_o$$

Estimador de Estado Completo - Forma Canónica Observable

Pasos para la obtención de un observador de estado completo:

1. Encontrar el polinomio característico de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$
2. Calcular matriz de observabilidad
3. Pasar el sistema a Forma Canónica Observable
4. Seleccionar los polos del observador para formar $\alpha(s)$
5. Calcular l_{oi} usando $l_{oi} = \alpha_i - a_i$
6. Calcular $\mathrm{T} = \mathcal{O}_{\mathrm{o}}^{-1}\mathcal{O}$
7. Calcular $\mathrm{L} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{L}_{\mathrm{o}}$

Sistema de Control con Estimador de Estado



Controlador con Estimador de Estado

1. Planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

2. Controlador:

$$u = -K\hat{x}$$

3. Error de Estimación:

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

Combinando 1,2 y 3, el controlador es:

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(x - \tilde{x})$$

Observador:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

Controlador con Estimador de Estado

Combinando:

$$\dot{x} = Ax - BK(x - \tilde{x})$$
$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x}$$
$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}}$$

Controlador con Estimador de Estado

Luego, los polos vienen dados por:

$$\begin{vmatrix} A - BK - \lambda I & BK \\ 0 & A - LC - \lambda I \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (A - BK - \lambda I)(A - LC - \lambda I) - 0 = 0$$

Los polos de la planta y el observador son independientes

Ejercicio

En el sistema propuesto anterior se requiere controlar con cero error en estado estacionario la tensión de salida E. Para efectuar realimentación de estados se debe utilizar un observador de orden completo que estime las corrientes $\hat{\imath}_1$ e $\hat{\imath}_2$.

Se efectuará realimentación de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & -(R_1+R_2)/L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/L_1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

La matriz A y C se utilizan para diseñar el observador

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

El integrador está en el procesador. Se puede verificar fácilmente que el sistema no es observable si se considera.

Diseño del observador

- Utilizando los mismos valores anteriores se tiene: $(R_1 = 10\Omega, R_2 = 5\Omega, L_1 = 10mH, L_2 = 15mH)$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 \\ 666.67 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

- Primero se verifica si el sistema es observable. $O = [C\ CA]^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3333.3 & -5000 \end{bmatrix}$
-
- El rango de la matriz de observabilidad es dos. Todos los estados son observables.
- Se busca la ecuación característica. Utilizando Matlab (charpoly o ss2tf) se llega a:

$$s^2 + 2000s + 3.33x10^5 s$$

Diseño del observador

- El sistema de control anterior fue diseñado para 150Hz de frecuencia natural en los tres polos. Se efectuará el diseño para 1500Hz.

$$\begin{bmatrix} \dot{i_{o1}} \\ i_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & 1 \\ -3.33x10^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{o1} \\ i_{o2} \end{bmatrix} + \cancel{\begin{bmatrix} -100 \\ 0 \end{bmatrix} v_1}$$

No participa en el diseño del observador, por eso no se transformó

$$Y_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{o1} \\ i_{o2} \end{bmatrix}$$

- Los valores propios de la matriz A original están en 29.2Hz y en 289.1 Hz. Con realimentación de estados se debe llegar a 1500Hz en el observador y 150Hz (ver ejercicio anterior) en el sistema de control.

Diseño del observador

- Por lo tanto debo llegar desde:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\imath}}_{o1} \\ \hat{\imath}_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & 1 \\ -3.33x10^5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_{o1} \\ \hat{\imath}_{o2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{o1} \\ L_{o2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_{o1} \\ \hat{\imath}_{o2} \end{bmatrix}$$

A una matriz de

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\imath}}_{o1} \\ \hat{\imath}_{o2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18850 & 1 \\ -8.8826x10^7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_{o1} \\ \hat{\imath}_{o2} \end{bmatrix}$$

Utilizando realimentación de estados. Aplicando la fórmula $\mathrm{L_{oi}} = \alpha_\mathrm{i} - \mathrm{a_i}$ se llega a:

$$L_{o1} = 16850 \quad L_{o2} = 8.8493x10^7$$

Diseño del observador

- Para retornar a variables físicas se debe utilizar $L_f = T^{-1}L_0$ con $\mathrm{T} = \mathcal{O}_o^{-1}\mathcal{O}$. Recuerde que la relación es $x_o = Tx_f$
- Utilizando Matlab encontramos T como T=inv(obsv(Ao,Co))*obsv(A,C).
- El comando ***obvs(A,C)*** entrega la matriz de observabilidad.
- El comando ***ctrb(A,B)*** la matriz de controlabilidad.
- finalmente

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3333.3 & 5000 \end{bmatrix} \quad \mathrm{L} = \begin{bmatrix} 21493 \\ 3369.9 \end{bmatrix}$$

- Los valores son relativamente altos, pero estamos utilizando una frecuencia natural bastante elevada.
- En Matlab se puede utilizar el commando ***place y acker*** para diseñar observadores.

Diseño del observador

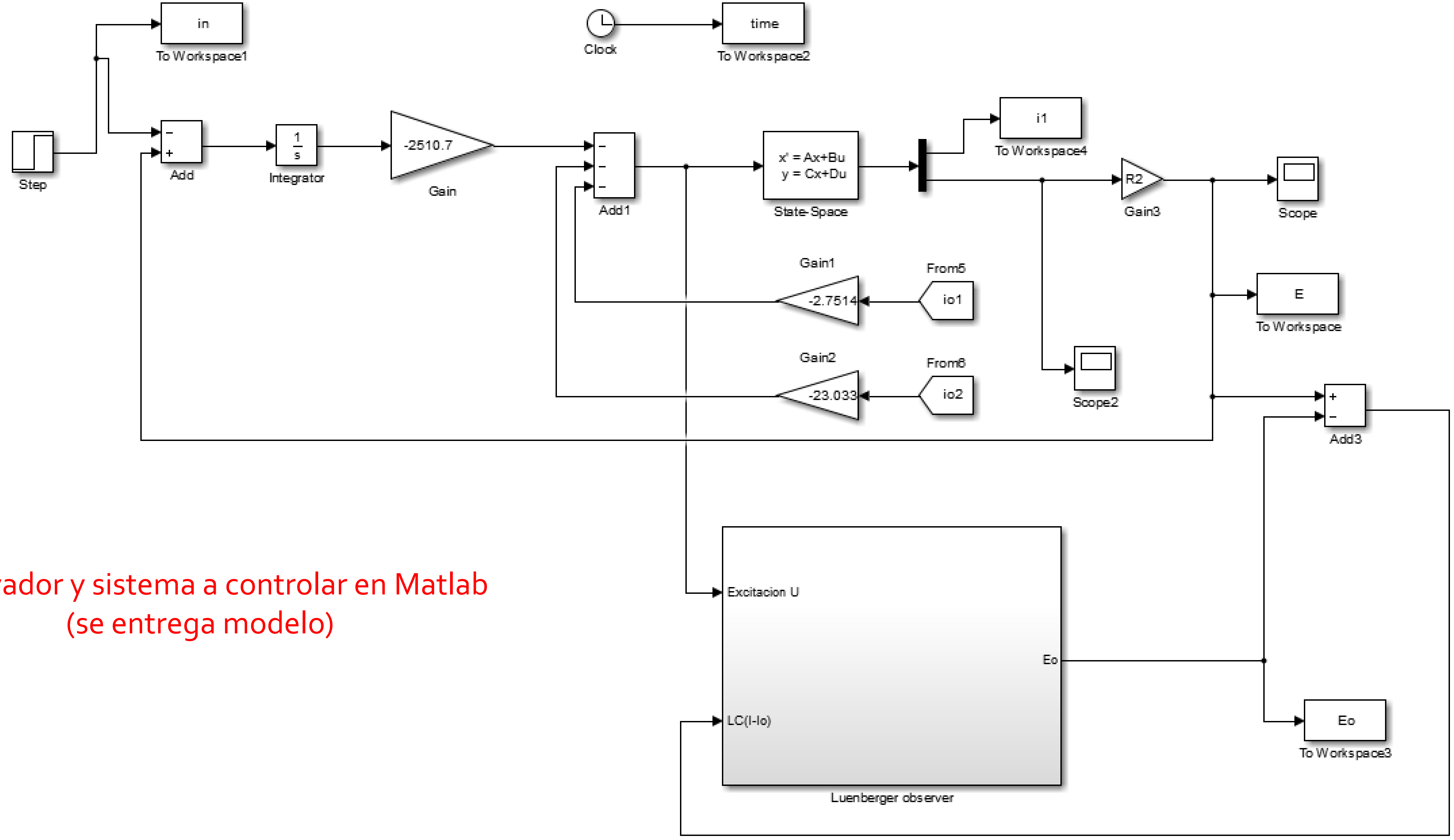
- El observador a implementar es:

Matriz C

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{i}}_1\\ \hat{i}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1000 & 1000\\ 666.67 & 1000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i}_1\\ \hat{i}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-100\\ 0\end{bmatrix}v_1+\begin{bmatrix}21493\\ 3369.9\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & R_2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\hat{i}_1\\ \hat{i}_2\end{bmatrix}\right)}$$

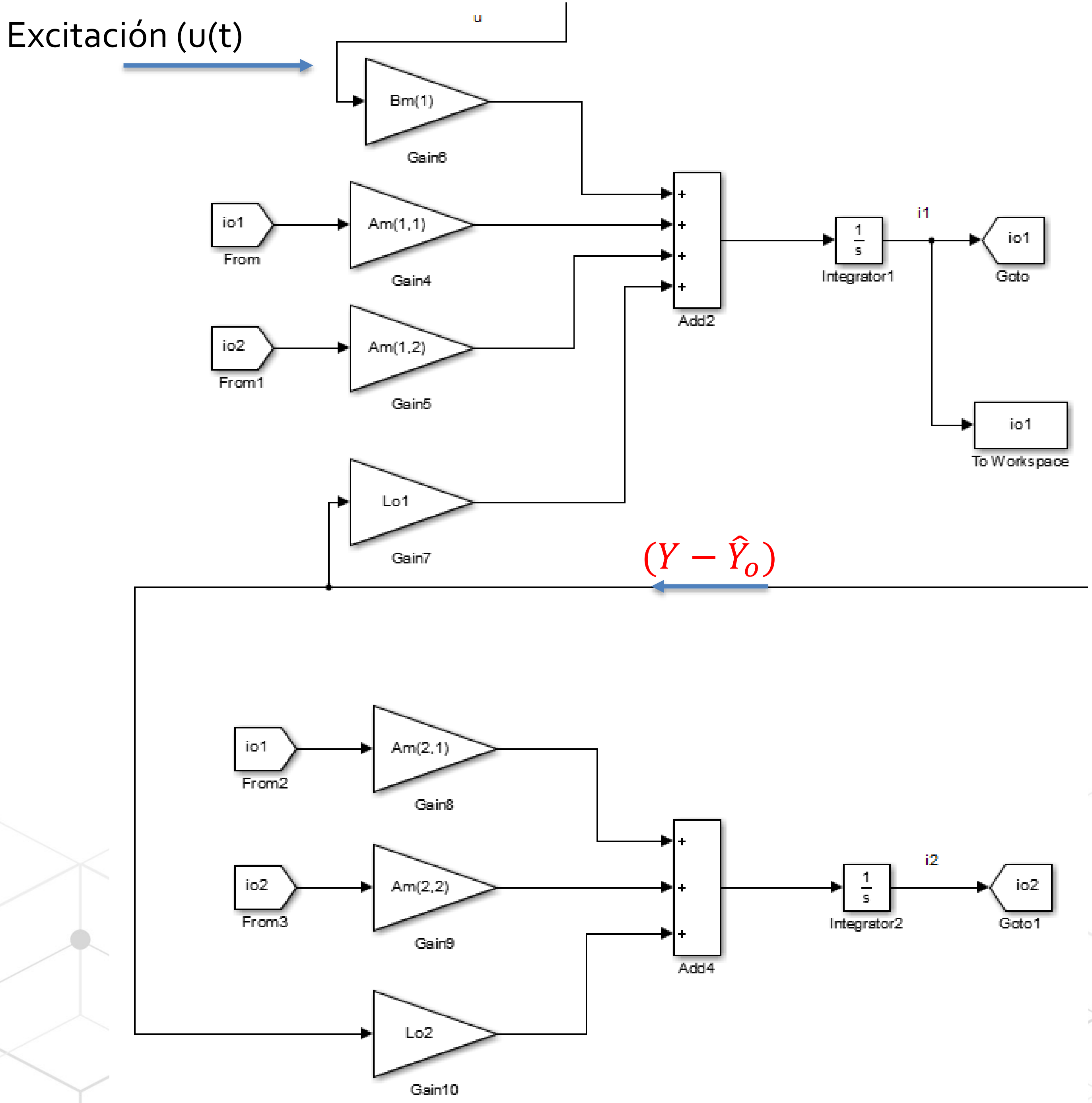
Matriz A   Matriz B   Matriz L $Y - \hat{Y}$

Todas las matrices están en el espacio físico



Observador y sistema a controlar en Matlab
(se entrega modelo)

Simple Observador de Luenberger



Ecuaciones de estado discretas

Ecuaciones de Estado Discretas

- El sistema discreto se puede obtener con varios métodos, entre otros:
  - Método Integral (exacto pero no fácil)
  - Método de Euler (aproximación)

Método de Euler

Para:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Para un tiempo de muestreo $t = kT$, se aproxima:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{1}{T}\Big(x\big((k+1)T\big) - x(kT)\Big)$$

T en este caso es el tiempo de muestreo

Ecuaciones de Estado Discretas

- Reemplazando en el Sistema continuo:

$$\frac{1}{T}\big(x((k+1)T) - x(kT)\big) \approx Ax(kT) + Bu(kT)$$
$$x\big((k+1)T\big) \approx (I + TA)x(kT) + TBu(kT)$$

- Normalmente se escribe como:

$$x[k+1] \approx (I + TA)x[k] + TBu[k]$$

- Se define:

$$\boxed{\begin{aligned} A_d &= I + TA \\ B_d &= TB \end{aligned}}$$

T en este caso es el período de muestreo

Ecuaciones de Estado Discretas - Controlabilidad

- Sistema:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

- Definición: Un sistema discreto es totalmente controlable si existe $u(k)$ definido sobre un número finito de muestras tal que dada cualquier condición inicial el estado $x(k)$ puede llegar a un estado deseado x_f en n periodos de muestreo.
- Controlabilidad:
  - Matriz de Controlabilidad: $\mathcal{C} = [B_d \quad A_d B_d \quad \dots \quad A_d^{n-1} B_d]$
  - Debe ser invertible o de rango n para que el sistema sea controlable.

Se usa el subíndice "d" para indicar sistema discreto

Ecuaciones de Estado Discretas - Observabilidad

- Sistema:

$$\mathrm{x}(\mathrm{k}+1) = \mathrm{A_d}\mathrm{x}(\mathrm{k}) + \mathrm{B_d}\mathrm{u}(\mathrm{k})$$
$$\mathrm{y}(\mathrm{k}) = \mathrm{C}\mathrm{x}(\mathrm{k}) + \mathrm{D}\mathrm{u}(\mathrm{k})$$

- Definición: Un sistema discreto es observable si dado $\mathrm{y}(\mathrm{k})$ sobre un número finito de muestras es posible determinar el estado inicial $\mathrm{x}(0)$.

- Matriz de observabilidad: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ \vdots \\ CA_d^{n-1} \end{bmatrix}$

- Esta matriz debe ser invertible o rango n para que el sistema sea observable.

Ecuaciones de Estado Discretas – Controladores por ubicación de polos

Sistema:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$
$$u(k) = -Kx(k)$$

Entonces:

$$x(k+1) = (A_d - B_d K)x(k)$$

Problema:
Elegir K tal que los valores propios de $A_d - B_d K$ se sitúen en los polos deseados en lazo cerrado.

Ejercicio Propuesto

Para el sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x$$

a) Diseñar un controlador con polos en $-5 \pm j5$.

b) Los estados no se pueden medir, por lo tanto se desea diseñar un observador de estados con los polos en $-50 \pm j50$

c) En una segunda instancia se tienen mediciones del estado x_1, por lo que se necesita estimar solo el estado x_2. Determine el observador del sistema.

EL 4004
Fundamentos de Control de Sistemas

Diapositivas basadas en las realizadas por Constanza Ahumada (Uchile) y Greg Asher (U. Nottingham)
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile