

EL 4004

Fundamentos de Control de Sistemas

Controladores en Variables de Estado

Diapositivas basadas en las realizadas por la profesora Constanza Ahumada
y el profesor Greg Asher
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal



- Considerar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Primero se debe transformar el sistema a la forma canónica modal/diagonal.

$$\dot{x}_D = \Lambda x_D + Qu$$

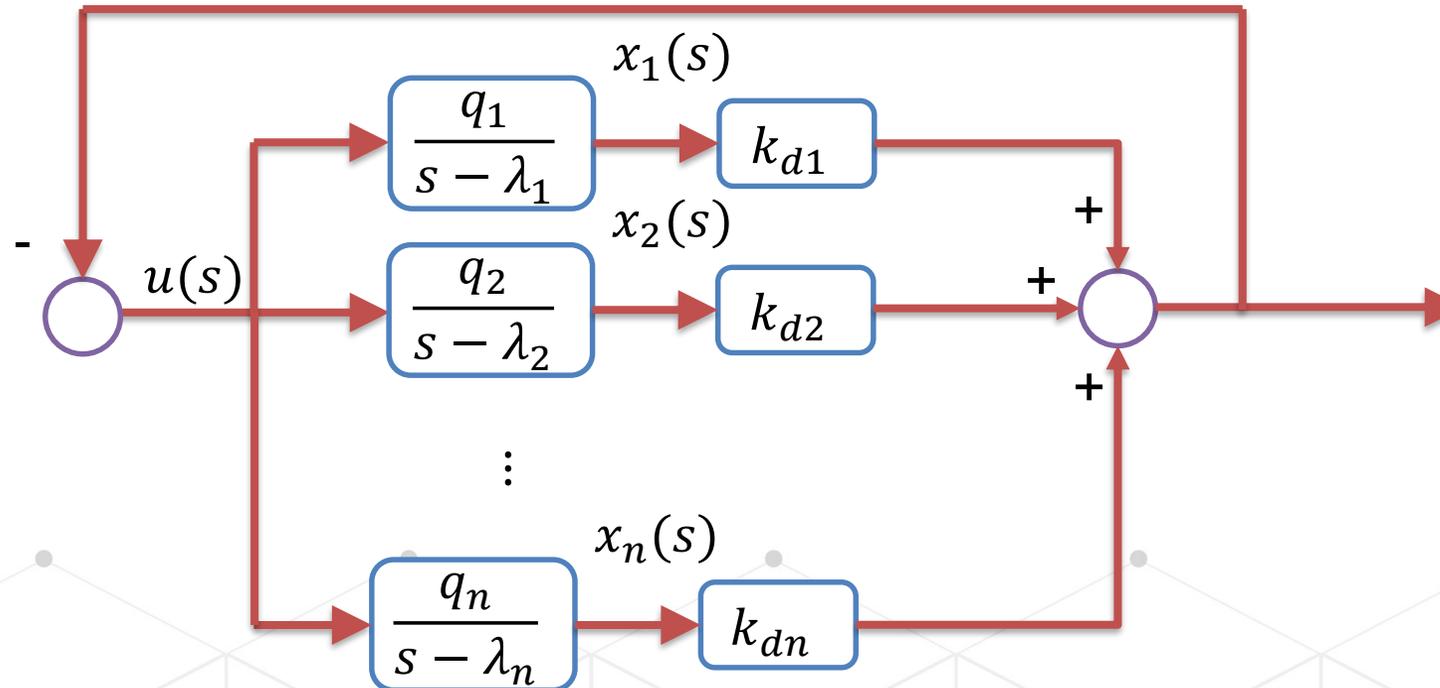
Donde:

$$Q = \vec{v}^{-1}B$$
$$\dot{x}_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} x_D + \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} u$$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Diagrama de Bloques:



- Ley de Control:

$$u = -K_d x_D = -[k_{d1} \quad k_{d2} \quad \dots \quad k_{dn}] x_D$$



Ejercicio Propuesto

Para el sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Se desea mantener la referencia del sistema de tal forma que se tengan polos en lazo cerrado ubicados en:

$$s = -5 \pm j5$$

Determine el controlador K .

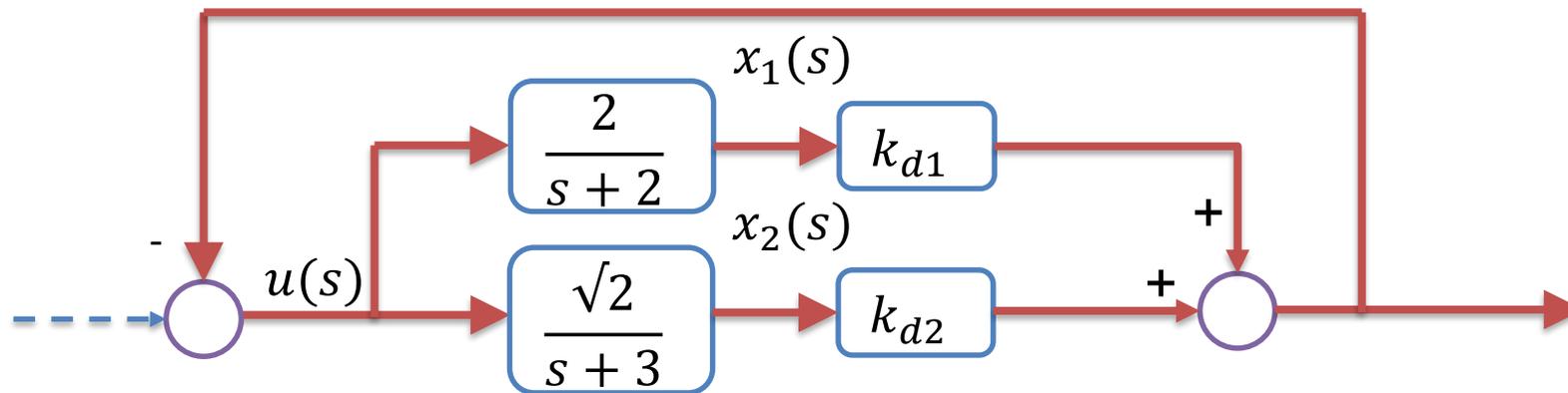
Los vectores propios son: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} +1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Por lo tanto la matriz de transformación es: $T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Se desea mantener la referencia del sistema de tal forma que se tengan polos en lazo cerrado ubicados en:

$$s = -5 \pm j5$$

Forma modal $\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} u$



• A lazo cerrado queda: $1 + \frac{2K_{d1}}{s+2} + \frac{\sqrt{2}K_{d2}}{s+3} = 0 = 0$

$$(s + 2)(s + 3) + 2K_{d1}(s + 3) + \sqrt{2}K_{d2}(s + 2) = (s + 5 + j5)(s + 5 - j5) = s^2 + 10s + 50$$

Resolviendo la Forma Modal

$$\begin{aligned} 2K_{d1} + \sqrt{2} K_{d2} &= 5 \\ 6K_{d1} + 2\sqrt{2} K_{d2} &= 44 \end{aligned}$$

$$K_{d1} = 17; K_{d2} = -20.506$$

Por lo tanto las ecuaciones de estado quedan:

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x_m - \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} [17 \quad -20.506] x_m$$

Utilizando el valor de la matriz T obtenida anteriormente $X_m = Tx$ se llega al sistema físico como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [17 \quad -20.506] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} x$$

Esta es la nueva matriz de realimentación de estados

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [17 \quad -12] x$$

$$K = \text{place}(A, B, P)$$

K es el vector de realimentación de estados

Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal



- Procedimiento:

Pasar el sistema a la forma modal y escribir ecuación característica en lazo cerrado



Seleccionar los polos en lazo cerrado λ_d y encontrar la ecuación característica en lazo cerrado $\alpha(s)$



Calcular k_{di} a partir de las ecuaciones características (Permite encontrar K_D)



Encontrar $K = K_D \vec{v}^{-1}$



Control Integral

Observabilidad

Obtención Forma Canónica Observable



Control Integral

- Para tener cero error se agrega control integral:

$$x_I = \int (r - y)dt \rightarrow \dot{x}_I = r - y$$

x_I es un nuevo estado, por lo que hemos aumentado el orden del sistema.

- Por convención de signos se define:

$$\dot{x}_I = y - r$$

- Si se quiere agregar un control integral a más de una variable, se agregan tantos estados extra como variables.



Control Integral

- Sistema en Lazo Abierto:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Control Integral:

$$\dot{x}_I = y - r = Cx - r$$

- El Sistema completo esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} r$$

Que es equivalente a:

$$\dot{x}' = A'x' + B'u + G'r$$

Con A' y B' las matrices utilizadas para el diseño del Controlador.



Control Integral

- El sistema en lazo abierto de un sistema con control integral queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} r$$

$$\dot{x}' = A'x' + B'u + G'r$$

- Ley de Realimentación:

$$u = -Kx' = -[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n \ k_{I1} \ k_{I2} \ \dots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{I1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$



Ejercicio Propuesto 1

En el sistema mostrado en la figura anterior se requiere controlar E con cero error en estado estacionario a entrada escalón. Recuerde que las ecuaciones de estado ya fueron obtenidas en las diapositivas anteriores ahora se debe agregar control integral.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{X}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & R_1/L_1 & 0 \\ R_1/L_2 & -(R_1 + R_2)/L_2 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix}$$

Salida del sistema

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix}$$

Se obtiene por
realimentación de
estados

La referencia no afecta la
dinámica

Ejercicio propuesto



- Se asume $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $L_1 = 10mH$, $L_2 = 15mH$.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{X}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 & 0 \\ 666.67 & -1000 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix} \quad Y = [0 \quad 5 \quad 0] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix}$$

Vamos a diseñar utilizando la forma canónica de control ayudado por Matlab.

`[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)` entrega un denominador de $s^3 + 2000s^2 + 3.33 \times 10^5 s$.

Por lo tanto la forma canónica de control es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{c1} \\ \dot{i}_{c2} \\ \dot{X}_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & -3.33 \times 10^5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{Ic} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

Son estados "no físicos"

Los polos actuales tienen frecuencias naturales de $[0 \quad -289.1 \quad -29.205]$ Hz. Se buscan frecuencias naturales de 150Hz, $\zeta=0.707$ y 150Hz

Ejercicio propuesto

- El nuevo denominador o función característica sería

$$s^3 + 2275.1s^2 + 2.144 \times 10^6 s + 8.3692 \times 10^8$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{c1} \\ \dot{i}_{c2} \\ \dot{X}_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2000 & -3.33 \times 10^5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix}$$

Debo llegar acá con realimentación de estados

- $$\begin{bmatrix} \dot{i}_{c1} \\ \dot{i}_{c2} \\ \dot{X}_{Ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2275 & -2.144 \times 10^6 & -8.3692 \times 10^8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \\ X_{cI} \end{bmatrix}$$

- $$K_1 = 275.14 \quad K_2 = 1.8107 \times 10^6 \quad K_3 = 8.3692 \times 10^8.$$

Ejercicio propuesto



- Recordando la definición de la matriz T tal que $X_c = T x_f$ es:

- $T = C_c C^{-1} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.015 & -0.001 \\ 0 & -1.5 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$. El problema físico con control integral queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{X}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 & 0 \\ 666.67 & -1000 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 275.14 & 1.8107 \times 10^6 & 8.3692 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.01 & 0.015 & -0.001 \\ 0 & -1.5 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix}$$

Kc

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{X}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 1000 & 0 \\ 666.67 & -1000 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.7514 & -23.033 & -2511 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E^* \end{bmatrix}$$

Kf



Control Integral - Ejemplo

- Para el siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Se quiere tener polos en: $s = -5, s = -2, s = -3$ y cero error en estado estacionario.



Control Integral - Ejemplo

Solución:

- Sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Se define el estado:

$$\dot{x}_I = y - r = x_1 - r.$$

- El sistema aumentado es:

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r$$

- La ley de control será:

$$u = -Kx' = -[k_1 \ k_2 \ k_I]x'$$



Control Integral - Ejemplo

- Sistema aumentado:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r$$

- Usaremos la **forma canónica modal** para la sintonización.
- Luego, se debe pasar el Sistema a la forma canónica modal.
 - Determinación polos:

$$|A - sI| = \begin{vmatrix} -2 - s & -1 & 0 \\ 0 & -3 - s & 0 \\ 1 & 0 & -s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 - s & -1 & 0 \\ 0 & -3 - s & 0 \\ 1 & 0 & -s \end{vmatrix} = (s + 2)(s + 3)s$$

- Los vectores propios son:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Control Integral - Ejemplo

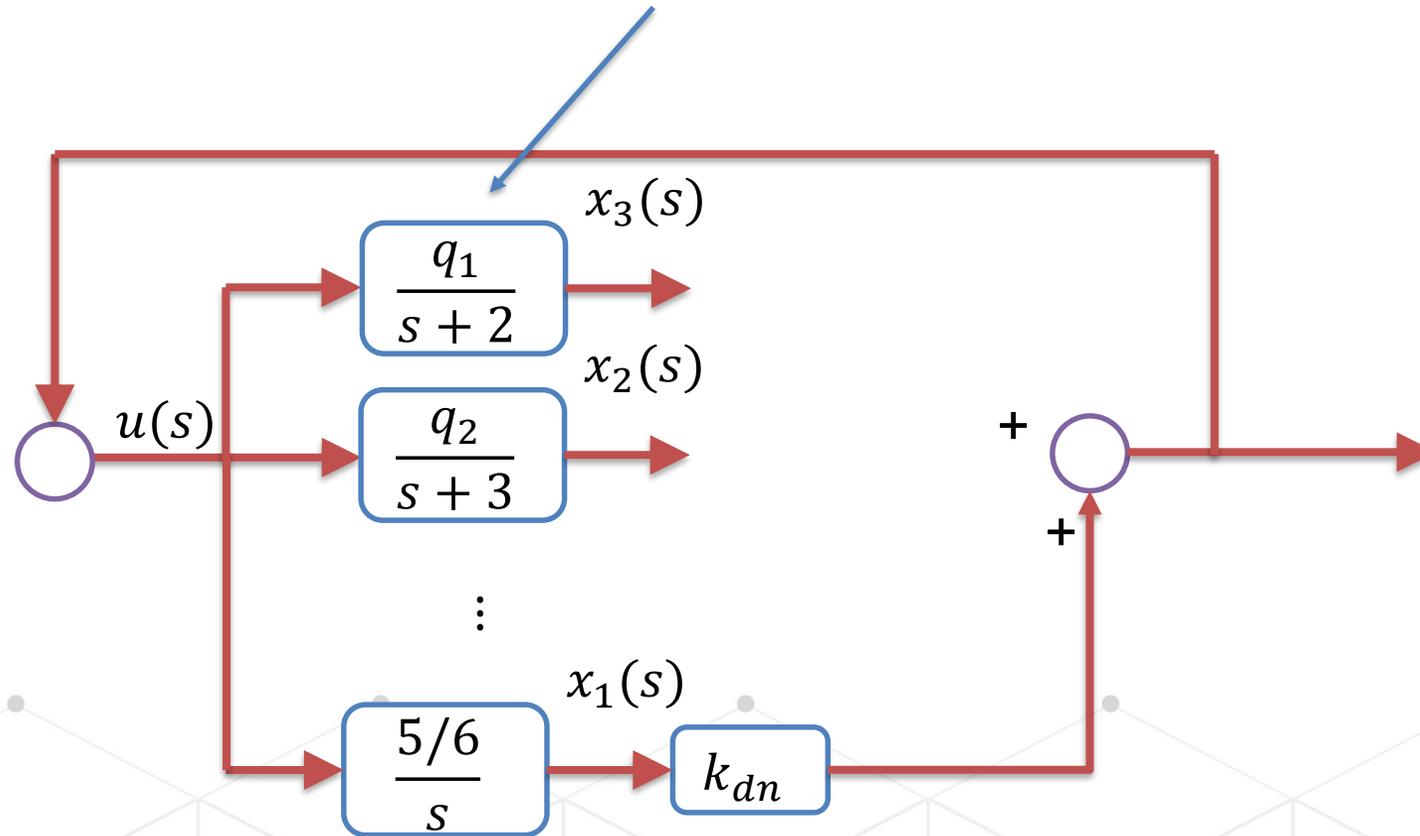
- Pasando a la forma canónica modal se obtiene:

$$\dot{x}'_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x'_D + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x}'_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x'_D + \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} u$$

- Se quiere llevar los polos a $s = -5, s = -3, s = -2$, por lo que solo se debe cambiar el modo 1.

Estos dos están bien ubicados



Solo éste se debe cambiar



Control Integral - Ejemplo

- Luego:

$$1 + \frac{5}{6}k_1 = 0 \rightarrow s + \frac{5k_1}{6} = 0$$

- Igualando coeficientes con $s + 5 = 0$:

$$\frac{5k_1}{6} = 5 \rightarrow k_1 = 6$$

- Se obtiene:

$$K_D = [6 \ 0 \ 0]$$

- Volviendo a las coordenadas originales, el controlador es:

$$K = [6 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [3 \ -1 \ 6]$$



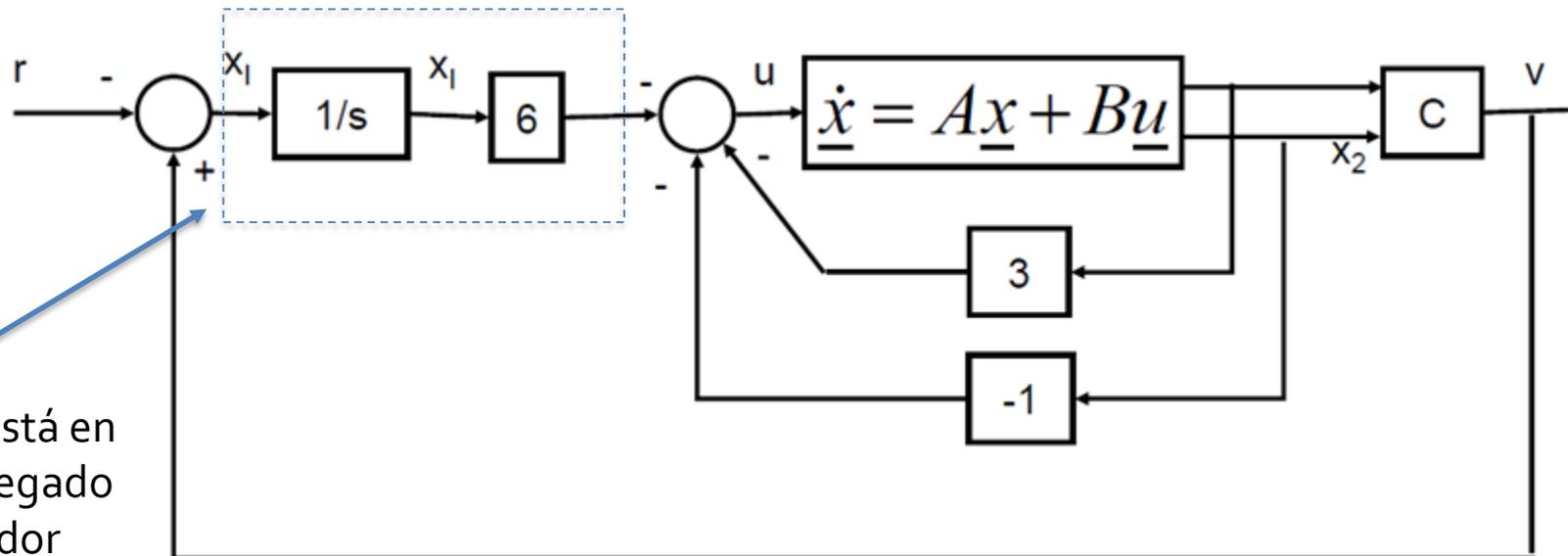
Control Integral - Ejemplo

- Para el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- El diagrama obtenido es:



Este estado no está en la planta. Es agregado en el procesador



Observabilidad

- Para el sistema dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- Un sistema es observable si el vector de estados puede ser reconstruido a partir de las salidas.

¿Es observable?

- Como x_1 no aparece en las variables de salida el estado no es observable.

¿Qué pasa si la planta no es estable y solo algunos estados son observables?

- Los sistemas pueden ser separados en las partes observables y no observables.



Observabilidad

- Para saber si un sistema es observable se estudia su Matriz de Observabilidad

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cy\end{aligned}$$

$$O = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$$

- La matriz es cuadrada para sistemas con una salida.
- Si el rango es menos que el orden del sistema, el sistema no es completamente observable.



Obtención Forma **Canónica Observable**

- Para pasar el sistema siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- A la forma canónica observable, se reemplaza:

$$\begin{aligned}x(t) &= Q\tilde{x}(t) \\ \tilde{A} &= Q^{-1}AQ, \tilde{B} = Q^{-1}B, \tilde{C} = CQ, \tilde{D} = D\end{aligned}$$

- Con:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= CQ = [0 \dots 0 \ 1]\end{aligned}$$



Obtención Forma **Canónica Observable**

- Luego, la transformación está dada por:

$$\left. \begin{array}{l} T\dot{x} = TAx + Tbu \\ y = Cx + Du \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_o = TAT^{-1}x_o + TBu \\ y = CT^{-1}x_o + Du \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_o = A_o x_o + B_o u \\ y = C_o x_o + Du \end{array}$$

- Si λ_i son los valores propios de A , la ecuación característica es:

$$\begin{aligned} (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) &= 0 \\ s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n &= 0 \end{aligned}$$



Obtención Forma Canónica Observable

- A partir de $s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$, se obtiene:

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ -a_3 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_o = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

¿Cómo se encuentra T?



Obtención Forma Canónica Observable

- Determinación de la matriz de transformación $x_o = Tx$

$$\begin{aligned}\dot{x}_o &= TAT^{-1}x_o + TBu \\ y &= CT^{-1}x_o + Du\end{aligned}$$

- A partir de la matriz de observabilidad:

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n+1}]^T \\ \mathcal{O}_o &= [C_o \quad C_o A_o \quad C_o A_o^2 \quad \dots \quad C_o A_o^{n+1}]^T \\ \mathcal{O}_o &= [CT^{-1} \quad CT^{-1}TAT^{-1} \quad CT^{-1}A_o A_o \quad \dots]^T \\ \mathcal{O}_o &= [CT^{-1} \quad CAT^{-1} \quad CT^{-1}TAT^{-1}TAT^{-1} \quad \dots]^T \\ \mathcal{O}_o &= [CT^{-1} \quad CAT^{-1} \quad CA^2 T^{-1} \quad \dots]^T \\ \Rightarrow T^T \mathcal{O}_o &= [CT^{-1}T \quad CAT^{-1}T \quad CA^2 T^{-1}T \quad \dots]^T = \mathcal{O}\end{aligned}$$

Por lo que:

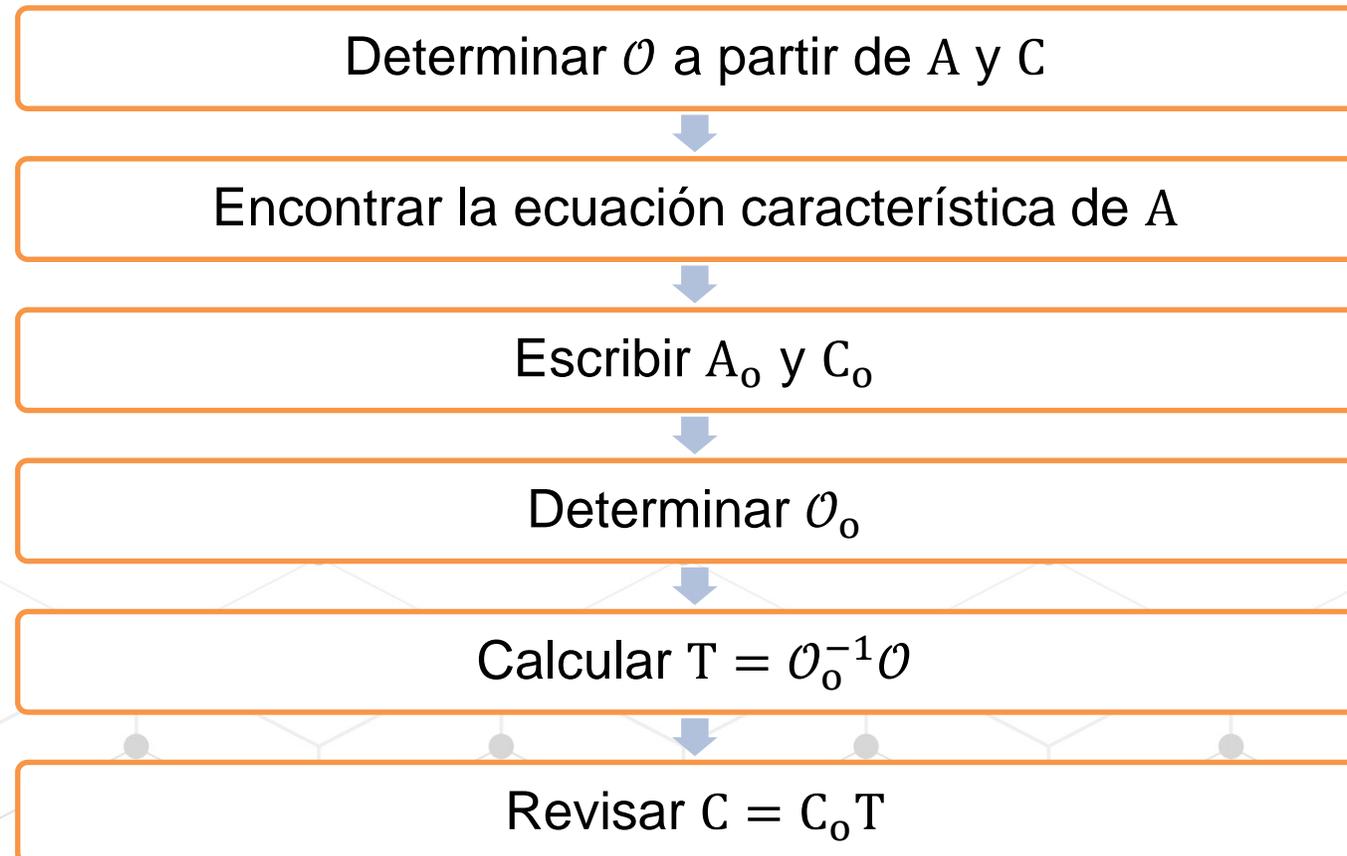
$$\begin{aligned}T^T \mathcal{O}_o &= \mathcal{O} \Rightarrow T^T = \mathcal{O} \mathcal{O}_o^{-1} \\ \Rightarrow T &= \mathcal{O}_o^{-1} \mathcal{O}\end{aligned}$$

Si el sistema no es totalmente observable
no existe inversa



Obtención Forma **Canónica Observable**

Pasos para la obtención de la Forma Canónica Controlable:



EL 4004

Fundamentos de Control de Sistemas

Controladores en Variables de Estado

