

EL 4004

Fundamentos de Control de Sistemas

Controladores en Variables de Estado

Diapositivas basadas en las realizadas por la Prof. Constanza Ahumada y el prof.

Greg Asher

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



Contenido

Obtención Forma Canónica Controlable

Controlador con Seguimiento de Referencia

Matriz de Participación



Controlabilidad

- Un sistema es controlable si existe una ley de control $u(t)$ que puede llevar un estado del sistema $x(t)$ a un estado deseado $x = r(t)$.
- Completamente controlable: todos los estados son controlables.
- Estados controlables: algunos estados son controlables.
- Para determinar si un sistema es controlable, basta con la matriz de controlabilidad:

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- La matriz es cuadrada para sistemas con una entrada.
- Si el rango de la matriz es menor que el orden del sistema, es no controlable.
- El número de modos no controlables son $n - \text{rango}(C)$



Obtención Forma Canónica de Control

- Para el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- Se desea encontrar la transformación tal que $x_c = Tx$

- Luego:

$$\dot{x}_c = TAT^{-1}x_c + TBu$$

$$y = CT^{-1}x_c + Du$$



$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u$$

$$y = C_c x_c + Du$$

- La forma canónica de control se utiliza en sistemas SISO para el diseño de los sistemas de control. El sistema debe ser controlable para poder aplicar la metodología.



Obtención Forma Canónica Controlable

- Si λ_i son los valores propios de A , la ecuación característica es:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = 0$$
$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

- A partir de $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$, se obtiene:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



Obtención Forma Canónica Controlable

Determinación de la matriz de transformación $x_c = Tx$

- Se sabe:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \\ \mathcal{C}_c &= [B_c \quad A_c B_c \quad A_c^2 B_c \quad \dots \quad A_c^{n-1} B_c] \\ \mathcal{C}_c &= [TB \quad TAT^{-1}TB \quad (TAT^{-1})^2TB \quad \dots \quad (TAT^{-1})^{n-1}TB]\end{aligned}$$

- Luego:

$$T^{-1}\mathcal{C}_c = [B \quad AB \quad T^{-1}(TAT^{-1})^2TB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = \mathcal{C}$$

- Por lo que:

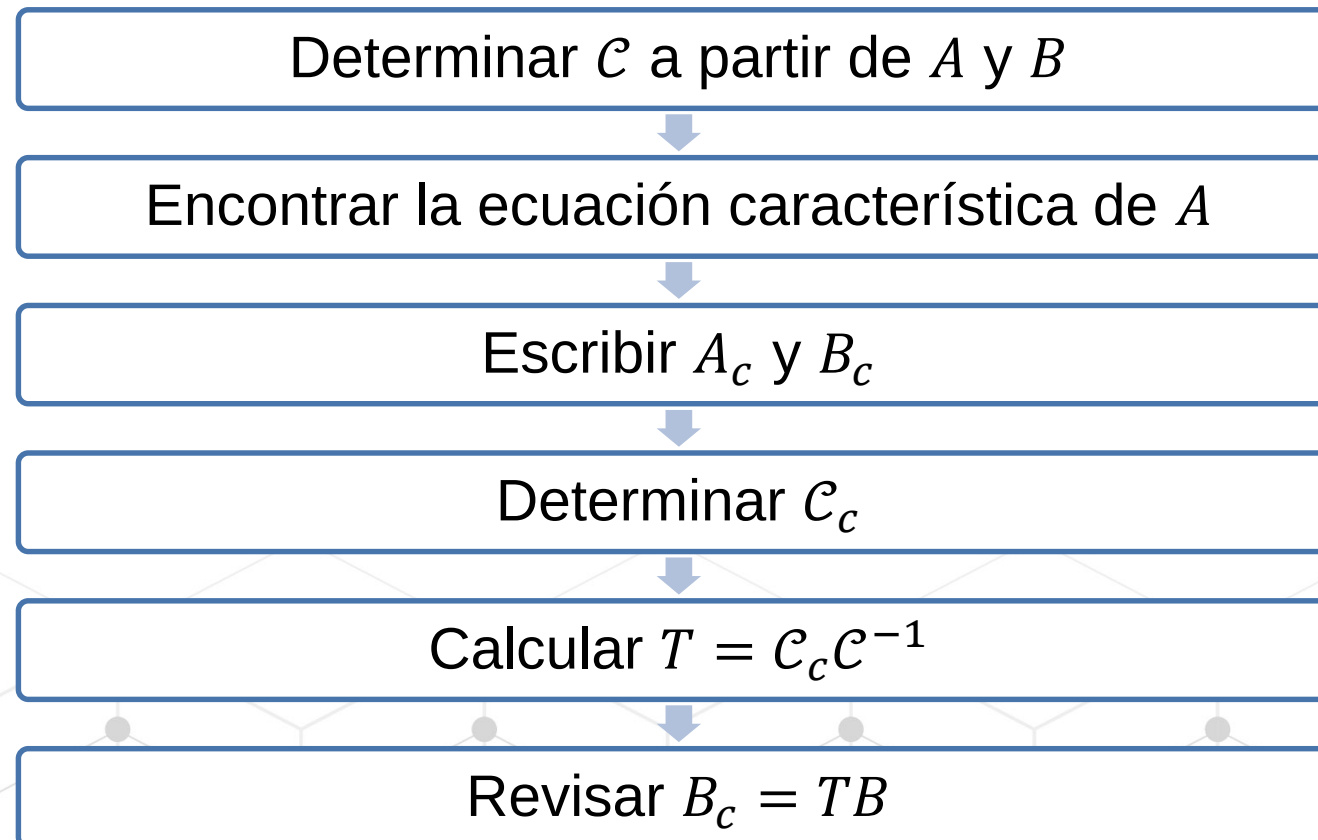
$$\begin{aligned}T^{-1}\mathcal{C}_c &= \mathcal{C} \\ \Rightarrow T^{-1} &= \mathcal{C}\mathcal{C}_c^{-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \mathcal{C}_c\mathcal{C}^{-1}$$



Obtención Forma Canónica Controlable

Pasos para la obtención de la Forma Canónica Controlable:

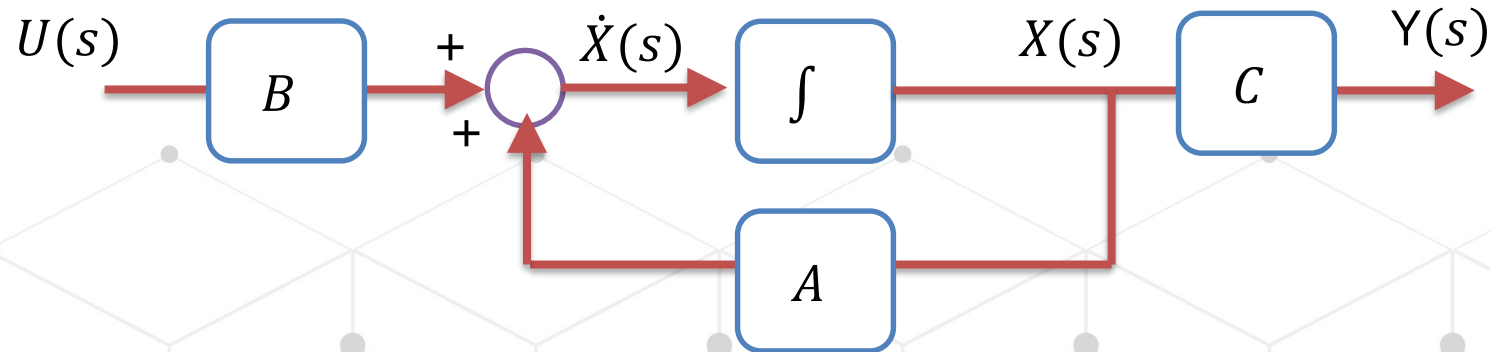




Controlador con Seguimiento de Referencia

- Representación de diagrama de sistema en variables de estado.

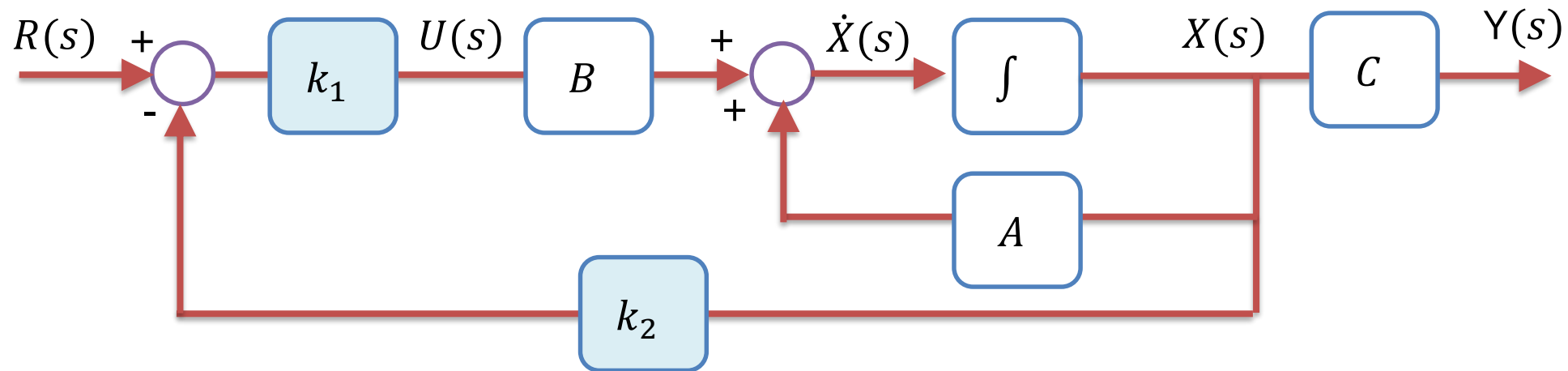
$$\begin{aligned}\dot{X}(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s)\end{aligned}$$





Controlador con Seguimiento de Referencia

- Realimentación de estados



$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= k_1(r - k_2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(k_1r - k_1k_2x) \\ y &= Cx\end{aligned}$$

$$k_1k_2 = K$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bk_1r \\ y &= Cx\end{aligned}$$



Controlador con Seguimiento de Referencia

- Dada la función de transferencia en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bk_1 r \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- El problema se reduce a:

Encontrar B tal que se obtengan los valores de $\lambda_1 \dots \lambda_n$ deseados.

Para ello, se resuelve:

$$|A - BK - \lambda I| = 0$$



2 soluciones se verán:

- A partir de la Forma Canónica Controlable
- A partir de la Forma Canónica Modal/Diagonal



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- Sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u \\ y = C_c x_c \end{array}$$

- El sistema se pasa a forma canónica controlable. La transformación es:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_c = TAT^{-1}x_c + TBu \\ y = CT^{-1}x_c \end{array}$$

- Donde $x_c = Tx$ y $T = C_c C^{-1}$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- El sistema en la forma canónica está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u \\ y &= C_c x_c\end{aligned}$$

Con

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Donde a_i es el coeficiente de s^{n-i} o λ^{n-i} de $a(s)$, la ecuación característica de lazo abierto.



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- El diseño de la ley de control viene dado por:

$$u = -K_c x_c = -(k_{c1} \ k_{c2} \ \dots \ k_{cn}) x_c$$

- La forma canónica controlable en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= (A_c - B_c K_c) x_c + B_c k_{c1} r \\ y &= C_c x_c \end{aligned}$$

Con:

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (k_{c1} \ k_{c2} \ \dots \ k_{cn})$$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} & \dots & k_{cn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -a_1 - k_{c1} & -a_2 - k_{c2} & -a_3 - k_{c3} & \dots & -a_n - k_{cn} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-a_1 - k_{c1}, -a_2 - k_{c2}, \dots, -a_n - k_{cn}$ son los coeficientes de la ecuación característica en lazo cerrado.



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} -a_1 - k_{c1} & -a_2 - k_{c2} & -a_3 - k_{c3} & \dots & -a_n - k_{cn} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Polinomios de la ecuación en lazo cerrado:

$$(s - \lambda_{c1})(s - \lambda_{c2}) \dots (s - \lambda_{cn}) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

- Igualando:

$$\alpha_i = a_i + k_{ci}$$

$$\Rightarrow k_{ci} = \alpha_i - a_i$$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- La matriz de realimentación K_c se ha obtenido en coordenadas canónicas:

$$k_{ci} = \alpha_i - a_i$$

- Para pasar a variables de estado con significado físico:

$$u = -K_c x_c$$

$$x_c = Tx$$

$$u = -K_c Tx = -Kx$$

Luego:

$$K = K_c T$$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Controlable

- Procedimiento:

Dados A, B, C encontrar la ecuación característica de lazo abierto a partir de $|A - BK| = 0$

Seleccionar los polos en lazo cerrado λ_c y armar la ecuación característica en lazo cerrado $\alpha(s)$

Calcular k_{ci} (Permite encontrar K_c)

Escribir A_c, B_c y encontrar $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_c$

Calcular $T = \mathcal{C}_c \mathcal{C}^{-1}$ y encontrar $K = K_c T$



Ejercicio Propuesto 3

Para el sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Se desea mantener la referencia del sistema de tal forma que se tengan polos en lazo cerrado ubicados en:

$$s = -5 \pm j5$$

Determine el controlador K .



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Considerar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Primero se debe transformar el sistema a la forma canónica modal/diagonal.

$$\dot{x}_D = \Lambda x_D + Qu$$

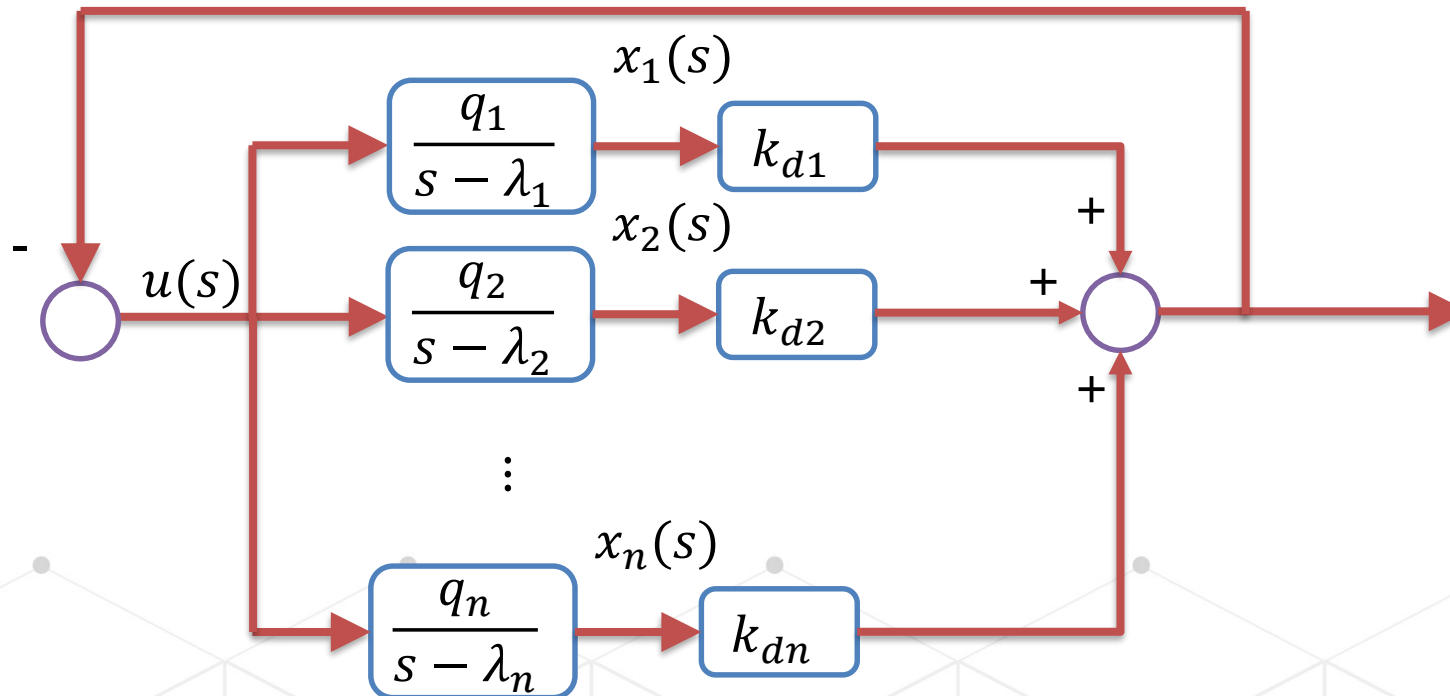
Donde:

$$Q = \vec{v}^{-1}B$$
$$\dot{x}_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} x_D + \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} u$$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Diagrama de Bloques:



- Ley de Control:

$$u = -K_d x_D = -[k_{d1} \quad k_{d2} \quad \dots \quad k_{dn}] x_D$$



Controlador con Seguimiento de Referencia - Forma Canónica Modal

- Procedimiento:

Pasar el sistema a la forma modal y escribir ecuación característica en lazo cerrado



Seleccionar los polos en lazo cerrado λ_d y encontrar la ecuación característica en lazo cerrado $\alpha(s)$



Calcular k_{di} a partir de las ecuaciones características (Permite encontrar K_D)



Encontrar $K = K_D \vec{v}^{-1}$



Ejercicio Propuesto 4

Para el sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Se desea mantener la referencia del sistema de tal forma que se tengan polos en lazo cerrado ubicados en:

$$s = -1 \pm j1, s_3 = -4$$

Determine el controlador K .



Matriz de Participación

- Para un sistema:

$$\dot{x} = Ax$$

- Vector Propio por la derecha:

$$A\overrightarrow{v_D} = \lambda_1\overrightarrow{v_D}$$

- Vector Propio por la izquierda:

$$\overrightarrow{v_I}A = \lambda\overrightarrow{v_I}$$

- Factor de Participación:

$$\rho_{jk} = v_{Ijk}v_{Djk}$$

- Indica la influencia del estado j en el modo k .



Ejercicio Propuesto 2

Para el sistema dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

Determine polos y participación de cada estado en ese polo.

EL 4004

Fundamentos de Control de Sistemas

Clase 27

Controladores en Variables de Estado

