Fundamentos de Control EL 4004

Primer control

(Segundo semestre 2021)
Segunda parte. Plazo de entrega 19:00 máximo

1) Un sistema tiene la siguiente planta:

$$G(s) = \frac{(s+a)}{s^2 - 2as + a^2}$$

Donde *a* es una variable que depende de la potencia nominal de la planta y que se puede asumir como un valor de diseño. Un diseñador con poca experiencia decide utilizar un lazo de realimentación unitario y un controlador proporcional. Se pide:

(para cada ítem, la respuesta debe ser fundamentada y producida como consecuencia de un desarrollo. **No se aceptan solo resultados**)

a) Utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo, en forma **gráfica** plantee el problema y determine el rango de ganancia proporcional que produce inestabilidad . 10 puntos

b) El diseñador añade un nuevo requerimiento al sistema de control. El tiempo de establecimiento del 2% definido como $4/(\omega_n \zeta)$ debe ser igual al $4/a$. Utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo, en forma **gráfica** determine la ganancia proporcional que entrega el tiempo de establecimiento solicitado. 10 puntos

c) Para la pregunta b), encuentre la frecuencia natural y coeficiente de amortiguamiento obtenido con la solución propuesta. 5 puntos

d) Con el controlador proporcional diseñado en b) ¿Cuál sería el error en estado estacionario para un escalón de magnitud A? 5 puntos

e) Después de calcular d), el diseñador se da cuenta que no es posible obtener cero error en estado estacionario a entrada escalón. Por lo tanto, en el controlador decide colocar (en cascada con la ganancia proporcional) la malla en atraso: (20 puntos)

$$G_{PI}(s) = \frac{s+a}{s}$$

Utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo, encuentre en forma **gráfica** la ganancia proporcional que debe utilizar en conjunto con esta malla en atraso para mantener el tiempo de establecimiento del 2% igual a $4/a$. ¿Cuál es el nuevo coeficiente de amortiguamiento en este caso?

f) Para el diseño realizado en e), debería existir tres polos de lazo cerrado ya que existen tres polos de lazo abierto. ¿Dónde se encuentra ubicado este polo? (resuelva en forma **grafica**). (5 puntos extras para aquella persona que lo pueda hacer y quiere mejorar su nota)

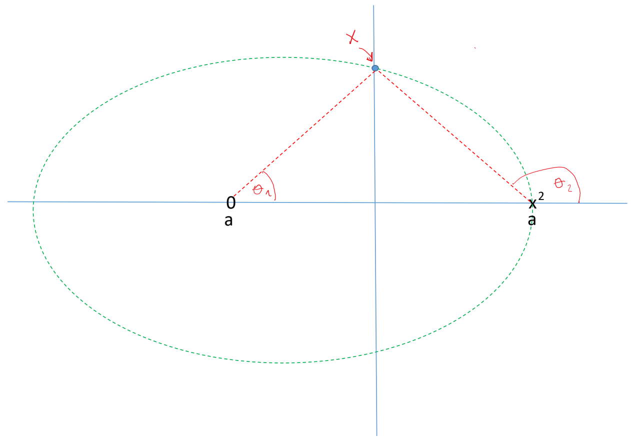
Recuerde, una respuesta es inválida si no es fundamentada adecuadamente (es decir sin ecuaciones, dibujos u otros).

El control tiene en total 105 puntos, distribuidos en la primera parte y en la segunda. La nota de 1-7 utiliza la siguiente fórmula.

$$N_{1-7} = \frac{3}{50}(N_{0-100}) + 1$$

Solución

a) En este caso el lugar de la raíz tiene la forma:



Utilizando la condición de ángulo se tiene:

$$2\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi$$

Por simetría se tiene que $\theta_2 = \pi - \theta_1$ por lo tanto la condición de ángulo es:

$$2(\pi - \theta_{1)} - \theta_1 = \pm\pi \rightarrow -3\theta_1 = -\pi$$

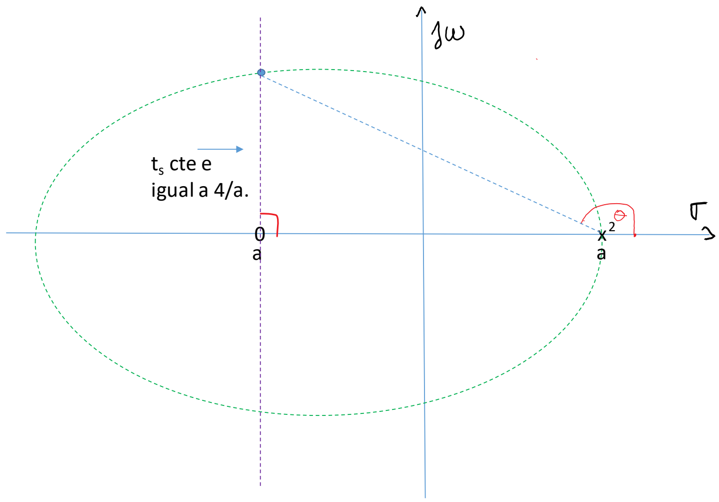
El ángulo $\theta_1 = \frac{\pi}{3} = 60°$. Utilizando $atan\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\pi}{3}$ se obtiene que $x = a\sqrt{3}$. Por simple trigonometría podemos ver que:

Distancia del punto a los polos=Distancia del punto a los ceros=$2a$.

$$K_{sistema} = \frac{\prod distancia\ a\ los\ polos}{\prod distancia\ a\ los\ ceros} = \mathbf{2a}$$

Por lo tanto si la ganancia $\boldsymbol{K_{sistema}} < \mathbf{2a}$ el sistema es inestable.

b) El locus de un sistema con tiempo de establecimiento constante es una línea en el semiplano izquierdo, paralela al eje imaginario. La línea está ubicada en un valor $\sigma = \omega_n\zeta$. Esto fue en su momento discutido en clases.



Utilizando la condición de ángulo se tiene:

$$2\left(\pi - atan\left(\frac{x}{2a}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow 2atan\left(\frac{x}{2a}\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = 2a}$$

Por lo tanto el punto que entrega un tiempo establecimiento igual a lo solicitado se encuentra ubicado en $-a \pm j2a$. La ganancia del sistema es fácil de encontrar considerando que:

Distancia del punto al cero=2a

Distancia del punto a los polos=2$\sqrt{2}a$

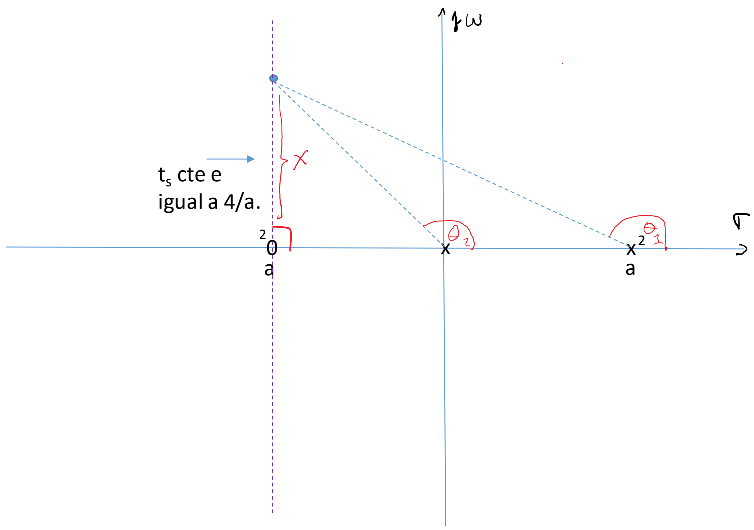
Ganancia del sistema=4$\boldsymbol{a}$

c) Muy fácil. La frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \boldsymbol{a\sqrt{5}}$. El coeficiente de amortiguamiento es el coseno del ángulo que forma el vector frecuencia natural con el eje real, es decir $\boldsymbol{\zeta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447}$.

d) Se aplica el teorema del valor final. Por lo tanto:

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\, e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{4a(s+a)}{s^2 - 2as + a^2}} = \frac{1}{5}$$

e) La nueva malla que se utiliza para obtener cero error en estado estacionario, produce la siguiente configuración de polos y ceros.



La ecuación de ángulo es:

$$2\left(\pi - atan\left(\frac{x}{2a}\right)\right) + \left(\pi - atan\left(\frac{x}{a}\right)\right) - \frac{2\pi}{2} = \pm\pi$$

$$-2atan\left(\frac{x}{2a}\right) - atan\left(\frac{x}{a}\right) = \pm\pi$$

Se define como variable auxiliar $Z = \frac{x}{2a}$

Por lo tanto;

$$2\,\mathrm{atan}(Z) + \mathrm{atan}(2Z) = \pi$$

Usando la identidad entregada ($\mathrm{atan}(x) \pm \mathrm{atan}(y) = atan\left(\frac{x \pm y}{1 - \mp xy}\right)$ se reduce $2\,\mathrm{atan}(Z)$ y se llega a:

$$\mathrm{atan}\left(\frac{2Z}{1 - Z^2)}\right) + \mathrm{atan}(2Z) = \pi$$

Usando nuevamente la identidad se tiene:

$$\mathrm{atan}\left(\frac{\frac{2Z}{1 - Z^2} + 2Z}{Denominador}\right) = \pi$$

Utilizando el operador tangente a ambos lados, se llega a:

$\frac{2Z}{1-Z^2} + 2Z = 0 \rightarrow Z = \sqrt{2} \rightarrow \boldsymbol{x = 2\sqrt{2}a}$.

La ganancia se calcula como:

Distancia a los dos polos=$3.4641a$

Distancia a los dos ceros=$2.8284a$

Distancia al polo del origen=$3a$

Utilizando la fórmula de siempre se llega a que la ganancia $\boldsymbol{K_{sistema} \approx 4.5a}$.

¿Cuál es el nuevo coeficiente de amortiguamiento?.

$\boldsymbol{\zeta = \frac{a}{3a} = 0.333}$

f) La solución de este problema requiere un trabajo iterativo. Por lo tanto, la pregunta se considera respondida si es que el planteamiento es correcto. Aplicando la condición de módulo se tiene:

$$\boldsymbol{\frac{L(a+L)^2}{(a-L)^2} = 4.5a}$$

La incógnita es L y se debe despejar una ecuación cúbica para encontrar la posición del tercer polo. Es relativamente simple encontrar, con algunas iteraciones, que el polo está ubicado en ***L=a/2***. Pero, tal como se señala anteriormente, basta efectuar correctamente el planteamiento para obtener el puntaje.