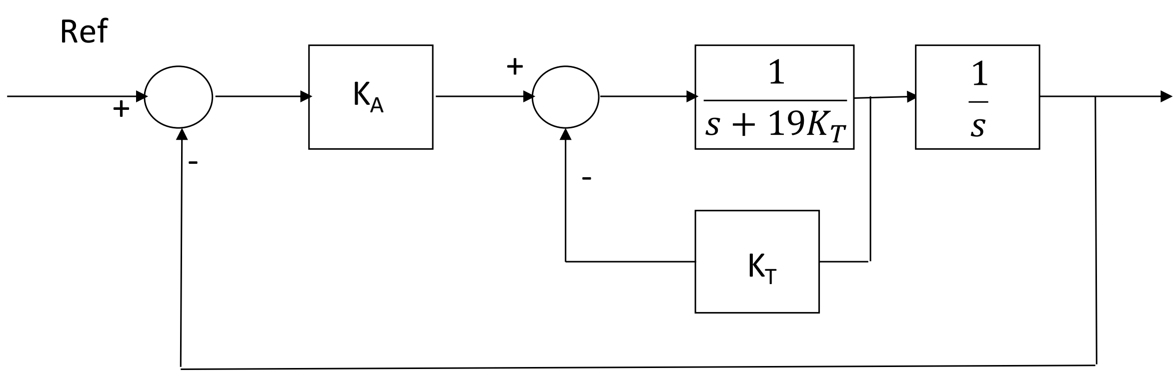
Fundamentos de Control EL 4004

Primer control

(Segundo semestre 2021)

Primera parte. Plazo de entrega 14:00 máximo.

1) Dado el sistema de control de la figura:



Utilizando el método del lugar de la raíz, dibujado a mano alzada pero en forma clara, para responder:

(para cada ítem, la respuesta debe ser fundamentada y producida como consecuencia de un desarrollo. **No se aceptan solo resultados**)

a) Encuentre los valores de K_T y K_A requeridos para lograr cero error en estado estacionario a entrada escalón, frecuencia natural de 20rad/seg y coeficiente de amortiguamiento de 0.707. Resuelva el problema **de forma gráfica** utilizando las condiciones de módulo y/o ángulo del lugar de la raíz. (15 puntos de 100)

b) Debido a una deficiente implementación en el microprocesador, el integrador que se encuentra en la figura anterior (lado derecho) toma la forma $(s - 10K_T)/(5s)$.

Incluso con este error, ¿Es posible diseñar un sistema de control que sea estable y bajo qué condiciones? Si así lo cree, encuentre el rango de ganancia K_A que produce un sistema estable. (25 puntos de 100)

c) Un ingeniero industrial, cree que el sistema mostrado se puede adecuar para obtener cero error en estado estacionario a la siguiente entrada:

$$Ref = 10 + 100\cos(\omega_0 t) + 5t$$

Donde ω_0 es una constante. Se pide:

- Remplace K_A con un controlador que pudiera llevar a cero error en estado estacionario el sistema de control de la figura anterior en presencia de esta referencia. (no se preocupe por estabilidad por ahora y asuma que un controlador como este puede llevar a un sistema estable). (10 puntos)

Podría necesitar esta formula

$$\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

El control tiene en total 105 puntos, distribuidos en la primera parte y en la segunda. La nota de 1-7 utiliza la siguiente fórmula.

$$N_{1-7} = \frac{3}{50}(N_{0-100}) + 1$$

(la máxima nota es un 7.0)

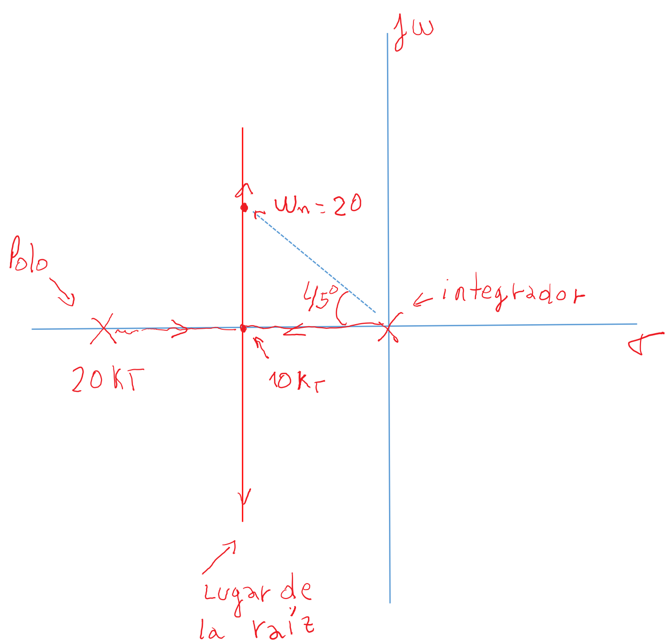
Pauta del primer control_primera parte

Resolución problema 1.

a) Para esto se obtiene primero la planta $G(s)H(s)$ a lazo abierto. El equivalente es:

$$G(s)H(s) = K_A \frac{\frac{1}{s+19K_T}}{1+\frac{K_T}{s+19K_T}} \frac{1}{s} = \frac{K_A}{s(s+20K_T)}$$

Si se grafica la función a lazo abierto, ésta queda como:



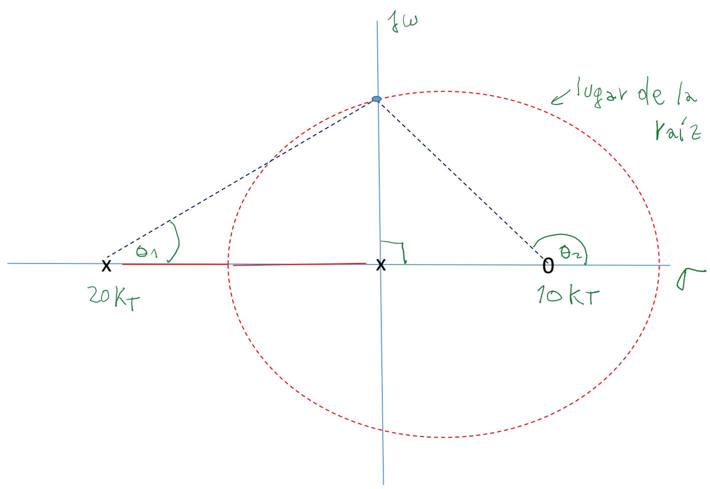
1) Aplicando la condición de ángulo se obtiene que el lugar de la raíz para esta configuración de polos es un línea vertical que parte desde $10K_T$ (lugar de raíz que fue discutido en clases). El valor de K_T se calcula a partir de $10K_T * \sqrt{2} = 20 \rightarrow K_T = 1.4142$.

2) El valor de la ganancia del sistema se calcula como $K_A=20^2$. Por lo tanto es igual a 400.

b) En este caso el integrador se cambia por $\frac{s-10K_T}{5S}$ y el sistema a lazo abierto queda como:

$$\frac{K_A(s-10K_T)}{5s(s+20K_T)}$$

el lugar de la raíz queda como:



Para que el sistema sea estable, se debe operar con ganancia negativa (o sea la sumatoria de los ángulos debe dar igual a 0 grados, ya que la ganancia tiene los 180 grados incluidos). Asumiendo que el borde entre estabilidad e inestabilidad se produce al cruzar el eje imaginario en un punto x, se aplica la condición de ángulo cómo:

$$\theta_1 + \frac{\pi}{2} - \theta_2 = 0 \rightarrow \theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{x}{20K_T}\right) - \left[\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{x}{10K_T}\right)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{atan}\left(\frac{x}{20K_T}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{-x}{10K_T}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Usando la expresión entregada al final de la primera parte del control se tiene que:

$$atan\left[\frac{\left(\frac{x}{20K_T} + \frac{x}{10K_T}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{200K_T^2}\right)}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Dado que la tangente es discontinua en ese punto, el denominador debe tender a cero. Es decir:

$$200K_T^2 = x^2 \ \rightarrow x = \pm 14.14K_T$$

Aplicando la condición de módulo y utilizando la siguientes variables auxiliares:

D1=distancia desde el punto al polo en 20K$_T$= $\sqrt{200K_T^2 + 400K_T^2} = 24.95K_T$
D2=distancia desde el punto al integrador =14.14K$_T$
D3=distancia desde el punto al cero en 10K$_T$ = $\sqrt{200K_T^2 + 100K_T^2} = 17.321K_T$

La ganancia del sistema se calcula como:

$$|K_{sistema}| = \frac{|K_A|}{5} = \frac{D1 * D2}{D3} \rightarrow |K_{sistema}| = 20.368K_T$$

Es decir el sistema es inestable cuando el módulo de la ganancia $K_A > 101.84K_T$

c) El controlador debe tener la siguiente estructura:

$$G_c(s) = \frac{K\prod(s+z_i)}{s(s^2+\omega_0^2)}$$

Con esa topología, el numerador debe tener tres ceros como máximo y el denominador debe cumplir con el principio del modelo interno y considerar además que ya existe un integrador en el sistema.

¿Qué se debe colocar en el denominador?. No lo sé, probablemente sería difícil encontrar esos términos y obtener un sistema estable, pero esa no era la pregunta. Por este motivo se indicaba que no se debían preocupar por la estabilidad del sistema.