

Pauta Pregunta 1 Examen

Profesor: Marcos Orchard

Auxiliares: Pía Contreras Guerrero

Ayudantes: Valentina Castro, Gabriel Chávez, Benjamín Moreno, Samuel Ponce,
 Mauricio Ravanal, Omar Silva, Francisco Soto

1.-(10 %) Dado el siguiente sistema dinámico en tiempo discreto:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Es posible de determinar la matriz de transición de estado mediante la identificación de las matrices A,B,C,D.Donde, en particular la matriz A corresponde a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Por lo tanto, este se puede encontrar la matriz de transición de estados mediante lo siguiente:

$$\phi(t-t_0) = A^{(t-t_0)} = Z^{-1} \left\{ z(z \cdot I - A)^{-1} \right\} \quad (4)$$

$$(z \cdot I - A) = z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(z \cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z+1}{z^2+z+3} & \frac{1}{z^2+z+3} \\ \frac{-3}{z^2+z+3} & \frac{z}{z^2+z+3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$(z \cdot I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z+1}{z^2+z+3} & \frac{1}{z^2+z+3} \\ -3 & \frac{z}{z^2+z+3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$(z \cdot I - A)^{-1} \cdot z = \begin{bmatrix} \frac{z(z+1)}{z^2+z+3} & \frac{z}{z^2+z+3} \\ \frac{-3z}{z^2+z+3} & \frac{z^2}{z^2+z+3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde ahora es necesario aplicar la transformada Z inversa al sistema. Para esto se hace componente a componente. Comenzando por la primera componente:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 + z}{z^2 + z + 3} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{z^2 + z + 3} + \frac{z}{z^2 + z + 3} \right\} = \quad (9)$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\pi}{2}\right) \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right\} + Z^{-1} \left\{ \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\pi}{2}\right) \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \quad (10)$$

Realizando el calculo mediante fracciones parciales

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{i}{2}\right)\right) \left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \frac{A}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2}\right)\right)} + \frac{B}{\left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)\right)} \quad (11)$$

$$\frac{z}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{i}{2}\right)\right)} = \frac{1/2}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{j\pi}{2}\right)\right)} + \frac{1/2}{\left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{i}{2}\right)\right)} \quad (12)$$

$$x(z) = 1/2 \cdot \frac{z}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)} + 1/2 \cdot \frac{z}{\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{1\pi}{2}\right)\right)} \quad (13)$$

$$x_1(k) = \left(1/2 \cdot \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{4}}{2} \right)^k + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2} \right)^k \right) \quad (14)$$

Segundo termino:

$$\begin{aligned} \frac{x(z)}{z} &= \frac{1}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \frac{A}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2}\right)\right)} + \frac{B}{\left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{\pi}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{-1}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2}\right)\right)} + \frac{1}{\left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{\pi}{2}\right)\right)} \end{aligned}$$

$$x(z) = \frac{-z}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{4}}{2}\right)\right)} + \frac{z}{\left(z - \left(\frac{1}{2} + j\frac{i}{2}\right)\right)} \quad / z^{-1}(\cdot) \quad x_2(k) = \left(-\left(\frac{1}{2} - i\frac{\pi}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2} + j\frac{-j}{2}\right)^k \right)$$

Finalmente el primer componente de la MTE es:

$$X(k) = X_1(k) \cdot X_2(k) = \left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k - 1/2 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k \right)$$

Llenando los elementos restantes de la matriz se obtiene que:

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} \left(3/2 \cdot \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k - 1/2 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k \right) & \left(\left(\frac{1}{2} + j\frac{i\pi}{2} \right)^k - \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k \right) \\ -3 \cdot \left(-\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{1}}{2} \right)^k + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\pi}{2} \right)^k \right) & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k - 1/2 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k \right) \end{pmatrix} \text{Funciones base:}$$

$$\rightarrow \left\{ \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{1}}{2} \right)^k, \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{11}}{2} \right)^k \right\}$$

- Respuesta el impulso:

$$\begin{aligned}
 h(k - k_0) &= z^{-1} \left\{ H(z) \cdot \frac{z^{-1} \{\delta(k - 10_0)\}}{1} (= z^{-1}) H(z) \right\} \\
 H(z) &= C^T (z \cdot I - A)^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{z+1}{z^2+2+3} & \frac{1}{z^4+2+3} \\ \frac{-3}{z^2+z+3} & \frac{z}{z^2+z+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{z^2+z+3} \\
 z^{-1} \left\{ \frac{1}{z^2+z+3} \right\} &= z^{-1} \left\{ \frac{-1}{(z - (1/2) - j\frac{1\pi}{2})} + \frac{1}{(z - (1/2) + j\frac{1\pi}{2})} \right\} \\
 &= (1/2 + j\sqrt{1/2})^{k-1} - \left(1/2 - j\frac{\sqrt{1}}{2} \right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

Donde la ultima expresión corresponde a la respuesta al impulso

2. Expresión general de la respuesta del sistema:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Phi(k - k_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \sum_{i=k_0}^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Phi(k, i + 1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot U(i)$$

3. Para la estabilidad BIBS analizaremos los polos del sistema que se encuentran en

$$\det |(z \cdot I - A)| = 0 \Rightarrow z_{1,2}^k = -0.5 \pm j1.6583$$

Dado que trabajamos con transformada Z el sistema es estable si es que los polos se encuentran en la circunferencia unitaria. Por lo tanto el sistema es BIBS inestable.

4) Considerando el sistema discreto se puede implementar la siguiente ley de control de la forma

$$U = -k \cdot x + r \\ \Rightarrow x(k+1) = (A - Bk) \cdot x(k) + Br(k) \rightarrow \text{forma } c \cdot c$$

Se requiere que los polos estén en $z_1^* = -0.1$ $yz_2^2 = 0.1$, entonces:

$$(z + 0.1)(z - 0.1) = z^2 - 0.001 \\ \text{Com } A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ wego :} \\ \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & -3 - k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} -1 - k_1 = 0 & k_1 = -1 \\ -3 - k_2 = 0.001 & \Rightarrow k_2 = -3.001 \end{cases}$$

5. Reemplazando el controlador obtenido se tiene las ecuaciones del sistema junto a la ley de control:

$$\Rightarrow x(k+1) = \left(\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3.001 \end{pmatrix} \cdot (10) \right) \cdot x(k) \\ \Rightarrow x(k+1) = \left(\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3.001 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot (l) \\ \Rightarrow X(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4.001 & 0 \end{pmatrix} \cdot X(k)$$