

FLUJOS DE FLUIDOS REALES

Usualmente, en los cursos de mecánica de fluidos básicos se derivan las ecuaciones fundamentales que se deben cumplir en el flujo de fluidos. Ellos pueden derivarse mediante dos enfoques: el integral o el diferencial.

Las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos se derivan de los principios de la física:

- Conservación de la materia
- Segunda ley de Newton
- Primera ley de la termodinámica
- Segunda ley de la termodinámica.

Es usual que en los cursos básicos de mecánica de fluidos, se deriven desde el punto de vista diferencial sólo los dos primeros.

La conservación de la materia indica que

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = 0 \quad (1)$$

donde ρ es la densidad y V el volumen

elemental de materia, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

donde d/dt indica la derivada material o sustancial. Equivalente a la Ec. (2) es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3)$$

Para el caso de un fluido incompresible, la Ec. 3 se reduce a:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4)$$

La segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (5)$$

Considerando la conservación de la materia (o ecuación de continuidad):

$$\vec{F} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (6)$$

En fluidos, la Ec. 6 se escribe por unidad de volumen:

$$\vec{f} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (7)$$

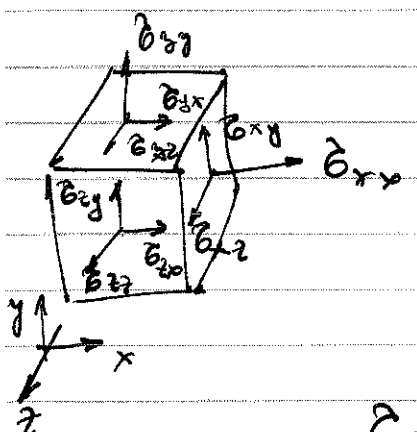
donde $\vec{f}$ es la resultante de las fuerzas externas,

por unidad de volumen. Las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido pueden ser volumétricas o superficiales. Las primeras dependen de la cantidad de materia y actúan en el centro de gravedad del elemento de fluido. Las segundas actúan sobre las superficies que definen al elemento de volumen y pueden ser normales o tangenciales a ellas.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{volumétricas}} + \vec{F}_{\text{superficiales}} \quad (8)$$

La fuerza volumétrica más común es la debida al campo gravitacional.

Las fuerzas superficiales definen un tensor de esfuerzos σ_{ij} :



σ_{ij}
 normal a la superficie dirección en la que actúa la fuerza

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Considerando un campo gravitacional, la segunda ley de Newton se expresa como

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma_{ij} \quad (10)$$

o, equivalentemente; según sus componentes:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

(11)

La ec. 10 (u 11) es general y es válida tanto para sólidos como para fluidos. El tipo de sustancia con que se trabaja queda definiéndose a partir de la ley constitutiva, o sea la relación que liga los esfuerzos con la deformación en el caso de los sólidos o los esfuerzos con la tasa de deformación para el caso de los fluidos.

La ley constitutiva de los fluidos debe ser tal que los esfuerzos de origen viscoso son nulos para un fluido en reposo y los esfuerzos normales corresponden a la presión hidrostática, o sea:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

El supuesto más simple para ligar el esfuerzo viscoso con la tasa de deformación es considerar una relación lineal entre ambos.

Stokes (1845) consideró:

- 1) El fluido es un continuo y σ_{ij} es a lo más una función lineal de $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- 2) El fluido es isotrópico
- 3) Si los tasas de deformación son nulas, debe recuperarse la condición hidrostática, o sea $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$.

Con los supuestos anteriores se llega a:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \nabla \cdot \vec{V} \quad (13)$$

Se define la presión mecánica como

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = p - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \vec{V} \quad (14)$$

En la eq. (13) μ es la viscosidad dinámica y λ se denomina "segundo coeficiente de viscosidad".

Notar que, de acuerdo a la Eq. 14, la presión media ($\bar{p}$) no es igual a la presión termodinámica (p). Stokes consideró $\lambda = -\frac{2}{3} \mu$. Sin embargo, empíricamente se ha obtenido que $\lambda > 0$. Por otra parte, en este curso consideraremos fluidos incompresibles, siendo así irrelevante el valor de λ y $\bar{p} = p$.

De este modo, la segunda ley de Newton para un fluido newtoniano (relación lineal entre σ_{ij} y ϵ_{ij}) en el campo gravitacional está dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \nabla \cdot \vec{v} \right] \quad (15)$$

Para un fluido incompresible la Ec. 15 se reduce a:

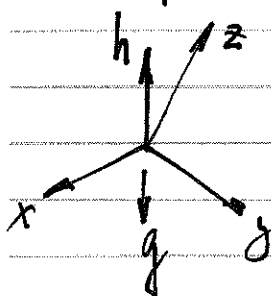
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (16)$$

La Ec. (15) corresponde a la Ecuación de Navier-Stokes. La reducción a la Ec. 16 también considera viscosidad constante.

Es frecuente fundir el efecto del campo gravitacional y el gradiente de presión en un solo término, denominado presión motriz $\hat{p}$:

$$\hat{p} = p + \rho g h \quad (17)$$

donde h es un eje vertical, positivo hacia arriba (paralelo a $\vec{g}$), quedando la ecuación de Navier-Stokes como:



$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (18)$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

La primera ley de la termodinámica nos indica que la variación de energía de un sistema se debe al calor agregado al sistema y al trabajo realizado sobre el sistema:

$$dE = d\hat{Q} + dW \quad (19)$$

E corresponde a la energía total del sistema:

$$E = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} + E_{\text{interna}}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} m V^2 + m \vec{g} \cdot \vec{r} + m e \quad (20)$$

donde e es la energía interna por unidad de masa, $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$ y $\vec{r}$ es el vector desplazamiento de la partícula de fluido.

La variación total de la energía del sistema es:

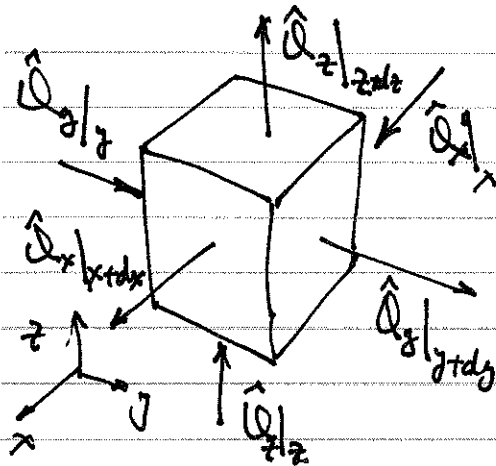
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\hat{Q}}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (21)$$

Considerando que el elemento de masa m está dado por $m = \rho dV$, los distintos términos de la Ec. 21 están dados por:

$$\frac{dE}{dt} = \rho dV \left(\frac{de}{dt} + \vec{V} \frac{dV}{dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right) \quad (22)$$

Para determinar la variación de calor en el sistema, consideremos un elemento de volumen

y el flujo de calor a través de las superficies que lo definen. Consideremos también que no hay fuentes ni sumideros de calor en el elemento de volumen



La variación total de calor es igual al flujo neto a través de todas las superficies:

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = \hat{Q}_x|_{x+dx} - \hat{Q}_x|_x + \hat{Q}_y|_{y+dy} - \hat{Q}_y|_y + \hat{Q}_z|_{z+dz} - \hat{Q}_z|_z \quad (23)$$

El flujo $\hat{Q}_i$ puede expresarse en términos de un flujo por unidad de área, q_i :

$$\hat{Q}_i = q_i \cdot dA_i \quad (24)$$

donde dA_i es el elemento de área con normal en la dirección del flujo, i .

Si consideramos que hay una transferencia de calor hacia el sistema, entonces:

$$\hat{Q}_i|_{x+dx_i} = \hat{Q}_i|_{x_i} - \frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial x_i} dx_i \quad (25)$$

El calor que sale es menor que el que entra

El flujo de calor por unidad de área lo determinamos a partir de la ley de Fourier:

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (26)$$

donde k es la conductividad térmica y T la temperatura. De este modo, Ec. 24 y 25 y 26 en 23:

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz$$

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (27)$$

$$\therefore \frac{d\hat{Q}}{dt} = - \nabla \cdot \vec{q} \, dV \quad (28)$$

$$\text{Ec. 26 en 28: } \frac{d\hat{Q}}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) \, dV \quad (29)$$

Si la conductividad térmica es constante:

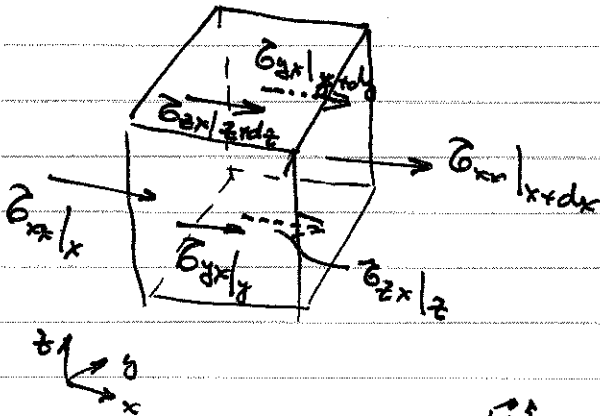
$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = k \nabla^2 T \quad (30)$$

Analizamos ahora el trabajo realizado sobre el sistema. Éste se debe a que para que una partícula de fluido se mueva, debe vencer los esfuerzos de origen viscoso y la presión.

El trabajo total es el resultado de los esfuerzos en las tres direcciones actuando sobre las distintas caras que definen el elemento de volumen:

$$dW = dW_x + dW_y + dW_z \quad (30)$$

Determinemos el trabajo en la dirección x :



$$dW_x = \left(\sigma_{zx} \right. \left. dA_z d\vec{r} \cdot \hat{i} \right) - \left(\sigma_{zx} \right. \left. dA_z d\vec{r} \cdot \hat{i} \right) + \left(\sigma_{yx} \right. \left. dA_y d\vec{r} \cdot \hat{i} \right) - \left(\sigma_{yx} \right. \left. dA_y d\vec{r} \cdot \hat{i} \right) + \left(\sigma_{xx} \right. \left. dA_x d\vec{r} \cdot \hat{i} \right) - \left(\sigma_{xx} \right. \left. dA_x d\vec{r} \cdot \hat{i} \right)$$

$$\sigma_{ij} \Big|_{x+dx} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dx_i + \sigma_{ij} \Big|_x$$

$d\vec{r}$ es el desplazamiento de la partícula de fluido.

$$\therefore dW_x = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz dx dy d\vec{r} \cdot \hat{i} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy dx dz d\vec{r} \cdot \hat{i} +$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz d\vec{r} \cdot \hat{i}$$

$$dW_x = \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} d\vec{r} \cdot \hat{i} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} d\vec{r} \cdot \hat{i} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} d\vec{r} \cdot \hat{i} \right) dx dy dz \quad (32)$$

La variación total de trabajo en la dirección x es:

$$\frac{dW_x}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (33)$$

($\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \hat{i}) = \vec{v} \cdot \hat{i} = u$)

Del mismo modo, al analizar el trabajo en la dirección y se tendrá:

$$dW_y = \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} d\vec{r} \cdot \hat{j} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} d\vec{r} \cdot \hat{j} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} d\vec{r} \cdot \hat{j} \right) dx dy dz \quad (34)$$

$$\frac{dW_y}{dt} = \left(\frac{\partial (\sigma_{yx} u)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{xy} u)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{zy} u)}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (35)$$

y para el trabajo en la dirección z :

$$dW_z = \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} d\vec{r} \cdot \hat{k} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} d\vec{r} \cdot \hat{k} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} d\vec{r} \cdot \hat{k} \right) dx dy dz \quad (36)$$

$$\frac{dW_z}{dt} = \left(\frac{\partial (\sigma_{zx} w)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{xz} w)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{yz} w)}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (37)$$

De este modo la variación total de trabajo es:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & \left(\frac{\partial (\sigma_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{xy} u)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{xz} u)}{\partial z} + \right. \\ & + \frac{\partial (\sigma_{yx} u)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{yy} u)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{yz} u)}{\partial z} + \\ & \left. + \frac{\partial (\sigma_{zx} w)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_{yz} w)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_{zz} w)}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} u + \sigma_{xy} u + \sigma_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx} u + \sigma_{yy} u + \sigma_{yz} w) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zx} u + \sigma_{yz} u + \sigma_{zz} w) \right] dx dy dz \quad (38) \end{aligned}$$

La Ec. 38 puede escribirse de manera más compacta como

$$\frac{dW}{dt} = \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \tau_{ij}) \quad (39)$$

Pero, $\nabla \cdot (\vec{V} \cdot \tau_{ij}) = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (40)

Teníamos (Ec. 10): $\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \tau_{ij}$

por lo que $\vec{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) = \vec{V} \cdot \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho \vec{g} \right)$

$$\vec{V} \cdot (\nabla \cdot \tau_{ij}) = \rho \vec{V} \cdot \left(\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{g} \right) \quad (41)$$

$$\therefore \frac{dW}{dt} = \left(\rho \vec{V} \cdot \left(\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{g} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dt \quad (42)$$

Reemplazando las expresiones para $\frac{dE}{dt}$ (Ec. 22),

$\frac{d\hat{Q}}{dt}$ (Ec. 29) y $\frac{dW}{dt}$ (Ec. 42) en la Ec(21):

$$\rho dt \left(\frac{de}{dt} + \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{g} \cdot \vec{V} \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) dt + \rho dt \left(\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{V} \cdot \vec{g} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dt$$

$$\therefore \rho \frac{de}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (43)$$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA APLICADA A FLUIDOS
EN CAMPO GRAVITACIONAL

Frecuentemente, el tensor de esfuerzos se divide en un término debido a la presión y otro a los esfuerzos viscosos.

Tenemos (Ec. 13): $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\nabla\cdot\vec{v}$

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p\nabla\cdot\vec{v} + \left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\nabla\cdot\vec{v}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (44)$$

Definiendo $\tau'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda\nabla\cdot\vec{v}$ (45)

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p\nabla\cdot\vec{v} \quad (46)$$

Tenemos también la ecuación de continuidad (Ec. 2):

$$\frac{dp}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Dividiendo por ρ y multiplicando por ρ :

$$\frac{\rho}{\rho}\frac{dp}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$\therefore \rho\nabla\cdot\vec{v} = -\frac{\rho}{\rho}\frac{dp}{dt} \quad (47)$$

Ec. 47 en 46:

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\rho}{\rho}\frac{dp}{dt} \quad (48)$$

Además
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$$

$$\therefore -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{dp}{dt} \quad (49)$$

Ec. 49 en 48:

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (50)$$

Ec. 50 en Ec. 43:

$$\rho \frac{de}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

$$\rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{dp}{dt}$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (51)$$

Entalpía: $\tilde{h} = e + \frac{p}{\rho} \quad (52)$

El último término de la Ec. 51 se denomina función de disipación Φ , y es siempre positivo:

$$\Phi = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (53)$$

Para un fluido newtoniano:

$$\begin{aligned} \Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda (\nabla \cdot \vec{V})^2 \quad (54) \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la energía, o primera ley de la termodinámica aplicada a un fluido newtoniano en campo gravitacional se reduce a:

$$\rho \frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (55)$$

La entalpía puede relacionarse con la temperatura mediante la expresión:

$$d\tilde{h} = c_p dT + (1 - \beta T) \frac{dp}{\rho} \quad (56)$$

donde β es el coeficiente de expansión térmica, definido como

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (57)$$

Para un gas ideal, es fácil ver que $\beta = \frac{1}{T}$, por lo que $d\tilde{h} = c_p dT$.

Ec. 56 en Ec. 55:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \beta T \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (58)$$

Si ~~domina~~ la transferencia de calor sobre la energía cinética (medido por V^2) y considerando que $\frac{dp}{dt}$ y Φ son del orden de V^2 , el límite para flujo de baja velocidad, o incompresibles, es

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (59)$$

Si la conductividad térmica es constante, la ecuación se simplifica aún más, quedando la energía del sistema definida sólo por la temperatura:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T \quad (60)$$

ECUACIÓN DE LA VORTICIDAD PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE

La ecuación de la vorticidad se obtiene fácilmente al tomar el rotor de la ecuación de Navier-Stokes y recordando algunas relaciones de cálculo vectorial:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

$\nabla \times (\text{Ec. 1})$:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} \right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{v}) \quad (2)$$

Recordando que $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2$

$$\nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \nabla \times \left(\cancel{\frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2} \right) \quad (3)$$

o ya que el rotor del gradiente de un escalar es nulo

$$\text{Además } \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \nabla \cdot \vec{\omega} \quad (4)$$

Considerando fluido incompresible y que la divergencia del rotor es nula ($\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0$), la Ec. 4 se reduce a

$$\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} \quad (5)$$

Además se sabe que $\nabla^2 \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times \nabla \times \vec{V}$ (6)

Luego, la Ec. 2 se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (7)$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (8)$$

De este modo la tasa de variación de la vorticidad es igual a la tasa de deformación de las líneas vorticosas más la tasa de difusión por efectos viscosos.

La Ec. 8 es importante en la dinámica de los fluidos. Ella no contiene el término de presión ni el asociado a las fuerzas másicas. De este modo, la vorticidad registra sólo el efecto de las fuerzas viscosas. La razón física de esto es que la vorticidad es un indicador de la rotación del ^{elemento de} fluido como si fuera sólido y las fuerzas de presión y másicas actúan en el centro de gravedad del elemento, no generando rotación. En cambio, las fuerzas viscosas actúan tangencialmente en la superficie del elemento pudiendo dar origen a un momento o torque, el que hará girar al elemento de fluido. Esto

se ve claramente al notar que para un fluido incompresible:

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} = \mu \nabla^2 \vec{V} = -\mu \nabla \times \vec{\omega} \quad (9)$$

Ec. 9 nos indica que si existe vorticidad, existe un esfuerzo. Notar que esta conclusión no es válida para un fluido compresible ya que el término $\nabla^2 \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times \vec{\omega}$ permite que los esfuerzos tangenciales no estén balanceados debido a la compresibilidad del fluido.

VORTICIDAD EN FLUJOS BIDIMENSIONALES

Consideremos un flujo en dos dimensiones, con $\vec{V} = (u, v, 0)$ función de x e y . En este caso:

$$\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} = \omega_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

y la Ec. 8 se reduce a

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (11)$$

además, el término convectivo $\vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$ es nulo, reduciéndose la ecuación a:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

La tasa de cambio de la vorticidad es igual a la difusión viscosa de vorticidad.

INTENSIFICACIÓN DE LA VORTICIDAD POR ESTIRAMIENTO DE LAS LÍNEAS VORTICOSAS

El término $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}$ de la Ec. 8 puede interpretarse como la generación o destrucción de vorticidad debido al "estiramiento" o "encogimiento" de los tubos vorticosos