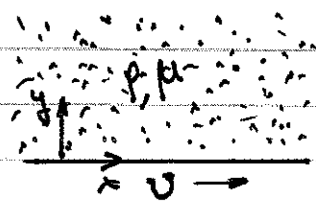
SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En general, las ecuaciones de Navier-Stokes son difíciles de resolver y, excepto para ciertos flujos bajo condiciones muy particulares, es posible obtener soluciones analíticas exactas. Los casos más simples de resolver corresponden a problemas con flujo permanente y uniforme, ya que se reducen a una ecuación diferencial ordinaria para la velocidad.

PRIMER PROBLEMA DE STOKES.

El "Primer problema de Stokes" corresponde al movimiento impulsivo de una placa infinita, en un medio fluido semiinfinito inicialmente en reposo. También se le conoce como "Problema de Rayleigh".



En este problema no hay gradiente de presiones en la dirección del movimiento ni velocidad en la dirección y. Las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

Con las condiciones de borde

$$u(0,t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ U & t > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

y $$u(y \to \infty, t) = 0 \qquad (3)$$

En general, la Ec.(1) con las condiciones dadas por (2) y (3) corresponden a una ecuación diferencial del tipo parabólico que por ser lineal puede resolverse rápidamente mediante la transformada de Laplace. Sin embargo buscaremos soluciones autosimilares, porque este método se usa frecuentemente en la solución de problemas que surgen en la teoría de capa límite, que veremos más adelante.

Las soluciones autosimilares son soluciones que existen para problemas definidos por ecuaciones diferenciales a derivadas parciales en los que no existe una escala de longitudes. Si el medio fluido no se expande indefinidamente y existiese otra placa, a una distancia h de la anterior, no existen soluciones autosimilares para el problema.

Como existe una velocidad característica (U), podemos adimensionalizar la velocidad:

$$\frac{u(y,t)}{U} = f \qquad (4)$$

La velocidad adimensional, f depende de el tiempo y la distancia a la placa. Buscamos que esa dependencia sea de una variable adimensional:

$$\eta = \alpha \frac{y}{t^n} \qquad (5)$$

η es la variable autosimilar y α una constante de proporcionalidad con dimensiones tales que haga η adimensional. Utilizando (4) y (5) en Ec. (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Un\frac{\alpha y}{t^{n+1}}f' = -Un\frac{\eta}{t}f' \quad , \quad f' = \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\alpha}{t^n}f'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U\frac{\alpha^2}{t^{2n}}f''$$

Ec.(1):

$$-Un\frac{\eta}{t}f' = \nu U\frac{\alpha^2}{t^{2n}}f'' \qquad (6)$$

Ec(6) es una ecuación diferencial ordinaria sólo si los coeficientes no dependen de t, lo que sucede si $n = 1/2$.

Luego:

$$f'' + \frac{\eta}{2\nu\alpha^2}f' = 0 \qquad (7)$$

y

$$\eta = \alpha\frac{y}{t^{1/2}} \qquad (8)$$

Para que η sea adimensional, α debe tener dimensiones de $T^{1/2}L^{-1}$. Los parámetros del problema son U, con dimensiones LT^{-1} y ν con dimensiones L^2T^{-1}. Resulta obvio que $\alpha = \nu^{-1/2}$, por lo que la variable autosimilar es:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}} \tag{9}$$

Ec. (7):
$$f'' + \frac{\eta}{2} f' = 0 \tag{10}$$

$$\frac{df'}{f'} = -\frac{\eta}{2}\, d\eta$$

$$\ln f' = -\frac{\eta^2}{4} + c$$

$$f' = K e^{-\eta^2/4}$$

$$f = K \int_0^{\eta} e^{-\eta^2/4}\, d\eta + B \tag{11}$$

La condición de borde $u(0,t) = U$ para $t>0$ significa en términos de las variables adimensionales.

$$f = \frac{u}{U} = 1 \quad , \quad \eta = 0 \text{:}$$

Luego: $B = 1$.

La condición de borde $u(0,t) = 0$ para $t=0$ significa

$$f = 0 \;, \quad \eta \to \infty$$

Luego $\quad 0 = K \int_0^{\infty} e^{-\eta^2/4}\, d\eta + 1$

Sea $\xi = \frac{\eta}{2}$, $d\xi = \frac{1}{2} d\eta$

$$0 = 2K \int_0^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi + 1 \tag{12}$$

Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ (integral de Gauss), por lo que:

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ec. 12: $\quad 0 = 2K \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 \quad \Rightarrow K = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

Ec. 11: $$f = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2/4} d\eta \qquad (13)$$

La integral de la Ec. 13 puede expresarse en términos de la función error; $\mathrm{erf}(\xi)$

$$\mathrm{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi$$

Luego, la solución del primer problema de Stokes es:

$$f = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi$$

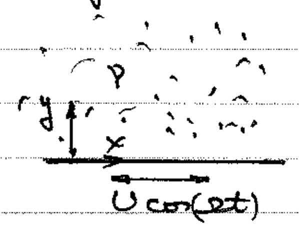
o:

$$\frac{u}{U} = 1 - \mathrm{erf}(\xi) \qquad (14)$$

con $$\xi = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \qquad (15)$$

SEGUNDO PROBLEMA DE STOKES

Corresponde a una placa infinita con un movimiento armónico $U\cos\Omega t$ y sobre la cual existe un fluido con velocidad nula en el infinito.



Al igual que en el problema anterior, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

Con las condiciones de borde:

$$y = 0, \quad u = U\cos(\Omega t) \qquad (2)$$
$$y \to \infty, \quad u \to 0$$

En rigor, también se requiere una condición inicial, pero buscaremos una solución para tiempos lo suficientemente grandes como para que sea independiente de la condición en $t=0$.

Es fácil ver que la solución de Ec.(1) con la condición de borde (2) debe ser oscilatoria. Busquemos una solución del tipo:

$$u(y,t) = Re\left[f(y)\, e^{i\Omega t}\right] \qquad (3)$$

Ec(3) en Ec.(1):

$$Re\left[i\Omega f(y)\, e^{i\Omega t}\right] = \nu\, Re\left[\frac{d^2 f}{dy^2}\, e^{i\Omega t}\right] \qquad (4)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 f}{dy^2} - i\frac{\Omega}{\nu} f = 0 \qquad (5)$$

$$\mathcal{D}^2 - i\frac{\Omega}{\nu} = 0$$

$$\mathcal{D}_1 = \sqrt{i\frac{\Omega}{\nu}} \quad , \quad \mathcal{D}_2 = -\sqrt{i\frac{\Omega}{\nu}} \qquad (6)$$

Pero $\sqrt{i} = \frac{1+i}{2}$

$$\therefore \quad \mathcal{D}_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \quad , \quad \mathcal{D}_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \qquad (7)$$

Por lo que la solución de Ec. (5) es:

$$f = A e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}y} + B e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}y}$$

$$f = A\left(e^{\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} e^{i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y}\right) + B\left(e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} e^{-i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y}\right) \qquad (8)$$

Pero la velocidad debe ser finita para todo y, por lo que $A = 0$. Luego:

$$f = B e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} e^{-i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} \qquad (9)$$

La condición de borde en $y = 0$ es $u = Re\left[U e^{i\Omega t}\right]$,

$$\therefore \quad B = U \qquad (10)$$

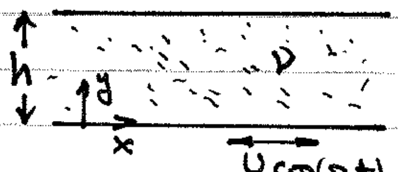
Ec. (3): $$u(y,t) = Re\left[U e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} e^{-i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} e^{i\Omega t}\right]$$

$$u(y,t) = Re\left[U e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y} e^{-i\left(\Omega t + \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}y\right)}\right] \qquad (11)$$

$$\therefore \quad u(y,t) = U e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\,y} \cos\left(\Omega t + \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\,y\right) \qquad (12)$$

PLACA OSCILANTE EN PRESENCIA DE OTRA FIJA

Consideremos ahora el caso en el que el fluido está limitado por una placa infinita, ubicada a una altura h de la placa que oscila con velocidad $U\cos\Omega t$.



Este problema sólo cambia una de las condiciones de borde respecto al problema anterior, siendo ellas:

$$y = 0 \;, \quad u = U\cos(\Omega t) \qquad (12)$$
$$y = h \;, \quad u = 0$$

Buscamos soluciones del tipo $u = \mathrm{Re}[f e^{i\Omega t}]$. Las condiciones de borde para f son:

$$y = 0, \quad f = U \qquad (13)$$
$$y = h, \quad f = 0$$

las que deben imponerse para determinar las constantes A y B de la Ec. 8.

$$f = A e^{ky} e^{kyi} + B e^{-ky} e^{-kyi} \;, \quad k = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} \qquad (14)$$

$$y = 0,\ f = U \Rightarrow \quad U = A + B \qquad (15)$$

$y=h,\ f=0 \Rightarrow 0 = A e^{kh} e^{ikh} + B e^{-kh} e^{-ikh}$ (16)

$$A = -B e^{-2kh} e^{-i2kh}$$

Ec. 15: $$U = B\left(1 - e^{-2kh} e^{-i2kh}\right)$$

$$B = \frac{U}{1 - e^{-2kh} e^{-i2kh}}$$

$$\therefore \quad A = \frac{-U e^{-2kh} e^{-i2kh}}{1 - e^{-2kh} e^{-i2kh}}$$

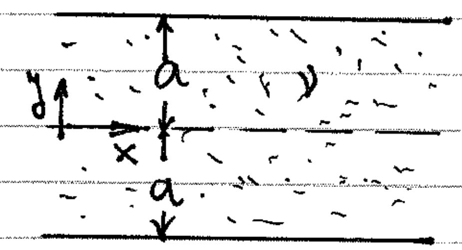
$$\therefore \quad f = \frac{-U e^{-2kh} e^{-i2kh}\, e^{ky} e^{kyi}}{1 - e^{-2kh} e^{-i2kh}} + \frac{U e^{-ky} e^{-iky}}{1 - e^{-2kh} e^{-i2kh}} \qquad (17)$$

Conocido f de Ec. 17, se puede determinar u:

$$u = \mathrm{Re}\left[f e^{i\Omega t}\right]$$

FLUJO PULSANTE ENTRE DOS PLACAS INFINITAS PARALELAS

Consideremos ahora dos placas paralelas entre las cuales el fluido puede moverse debido a un gradiente oscilatorio de presiones, $\frac{\partial p}{\partial x} = P\cos(\Omega t)$



En este caso, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (18)$$

con las condiciones de borde:

$$y = a \;, \quad u = 0 \;, \quad \forall t$$
$$y = -a \;, \quad u = 0 \;, \quad \forall t \qquad (19)$$

Este problema puede resolverse de manera análoga a los dos anteriores reconociendo que el gradiente de presiones puede escribirse como

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Re\left[P e^{i\Omega t}\right] \qquad (20)$$

Buscamos una solución del tipo

$$u(y,t) = Re\left[f e^{i\Omega t}\right] \qquad (21)$$

Ecs. 20 y 21 en Ec. 18:

$$Re\left[i\Omega f e^{i\Omega t}\right] = -\frac{1}{\rho} Re\left[P e^{i\Omega t}\right] + \nu Re\left[f'' e^{i\Omega t}\right] \qquad (22)$$

$$\therefore \quad f'' - \frac{i\Omega}{\nu} f = \frac{P}{\rho\nu} \qquad (23)$$

con el cambio de variable:

$$-\frac{i\Omega}{\nu} f - \frac{P}{\rho\nu} = -\frac{i\Omega}{\nu} g \qquad (24)$$

la Ec. 23 se integra fácilmente:

$$f'' = g''$$

Ec. 23 queda $\quad g'' - \frac{i\Omega}{\nu} g = 0 \qquad (25)$

Con las condiciones de borde $y = \pm a$, $u = 0$, $f = 0 \Rightarrow$

$$y = \pm a \quad , \quad g = \frac{\mathcal{P}}{i\rho\Omega} = \frac{-i\mathcal{P}}{\rho\Omega} \qquad (26)$$

Ec.(25) es idéntica a Ec.(5), por lo que su solución es:

$$g = A\, e^{\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, y}\, e^{i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, y} + B\, e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, y}\, e^{-i\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, y} \qquad (27)$$

$$f = \frac{i\mathcal{P}}{\rho\Omega} + A\, e^{Ky}\, e^{iKy} + B\, e^{-Ky}\, e^{-iKy} \quad , \quad K = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} \qquad (28)$$

Imponiendo las condiciones de borde (26) en Ec.(2)
se obtienen A y B, resultando para f:

$$f = i\frac{\mathcal{P}}{\rho\Omega}\left[1 - \frac{\cosh\left((1+i)\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, y\right)}{\cosh\left((1+i)\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, a\right)}\right] \qquad (29)$$

de donde se obtiene la velocidad.

$$u(y,t) = \mathrm{Re}\left[i\frac{\mathcal{P}}{\rho\Omega}\left[1 - \frac{\cosh\left((1+i)\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, y\right)}{\cosh\left((1+i)\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\, a\right)}\right] e^{i\Omega t}\right] \qquad (30)$$