

P₁

¿; tenemos la ecuación de equilibrio hidrostático
 $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} = -\rho g$, podemos elegir escribirla

en función de la profundidad óptica $d\tau_r = -K_r \rho dr$.
 $\Rightarrow dr = \frac{d\tau_r}{-K_r \rho} \Rightarrow \frac{dP}{d\tau_r} (-K_r \rho) = -\rho g \Rightarrow \frac{dP}{d\tau_r} = \frac{g}{K_r}$

Esto puede ser útil a la hora de modelar el interior de las estrellas.

P₂

Antes de pensar en fusiones de átomos de H como fuente de energía, se podía pensar en reacciones químicas como la fuente principal ($H+H \rightarrow H_2 + \gamma$, etc...).

Primero, el número de átomos de Hidrógeno sería

$$N = \frac{M_\odot}{m_H} \approx 1.2 \times 10^{57}, \text{ si por cada uno podríamos obtener}$$

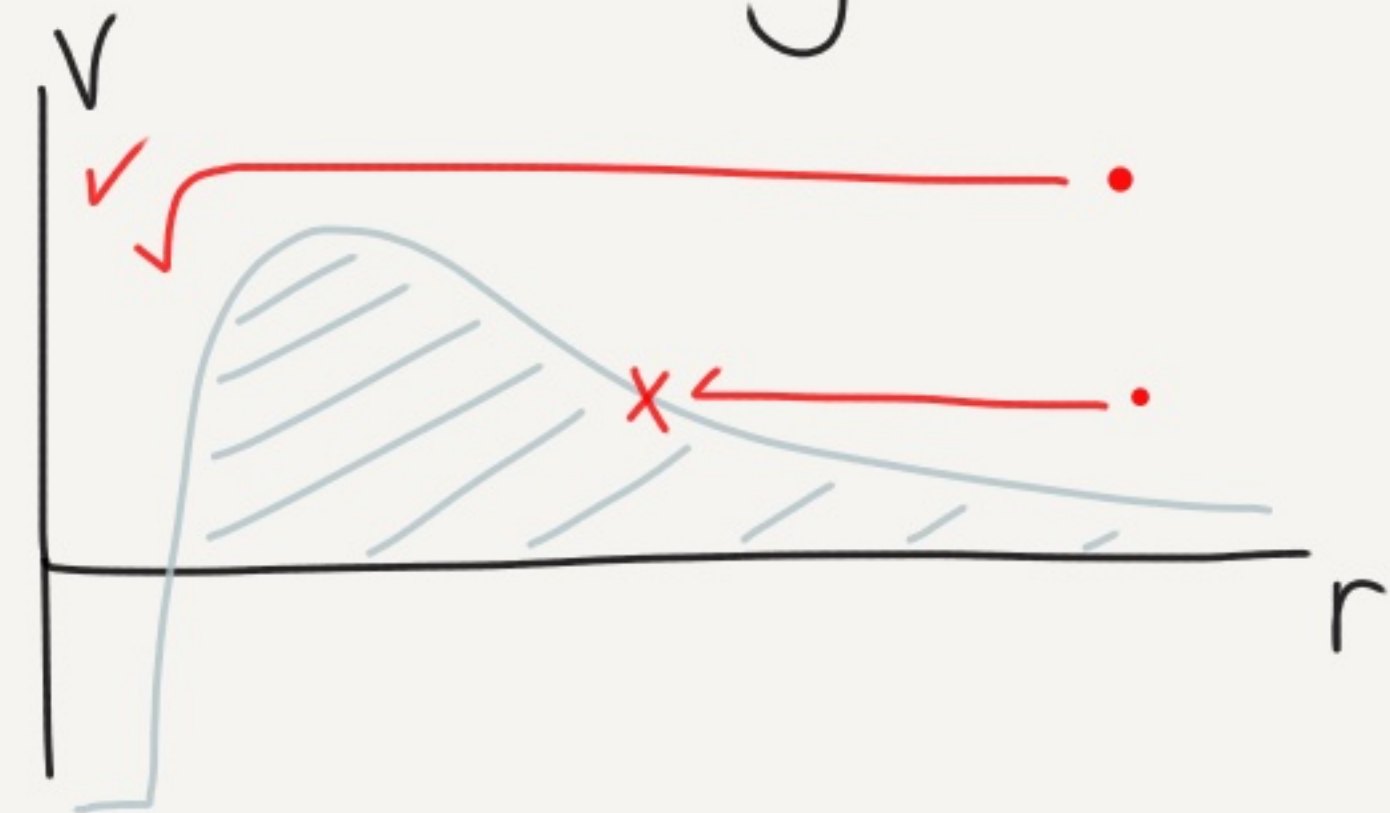
10 eV, la energía disponible total sería $E_{\text{chem}} = 10 \cdot N$.
Luego, con $L_\odot$ la luminosidad del Sol, el tiempo que se demoraría en consumir su energía sería

$$t_{\text{chem}} = \frac{E_{\text{chem}}}{L_\odot} = \frac{1.2 \times 10^{58} \text{ eV}}{3.84 \times 10^{26} \text{ W}} \approx 5 \times 10^{12} \text{ s} = 1.6 \times 10^5 \text{ yr}$$

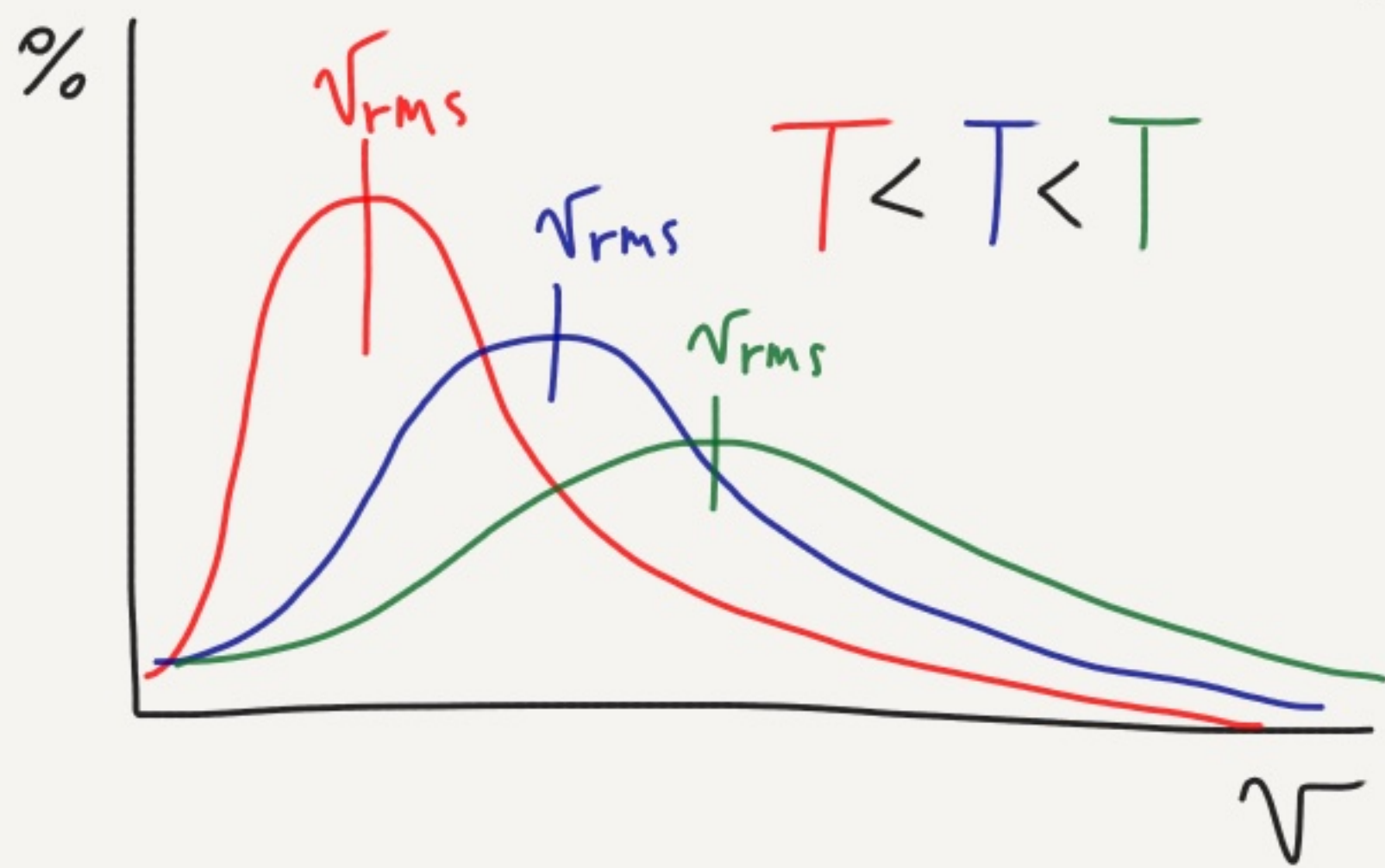
Lo que es mucho más corta que la estimación real $\Rightarrow$ reacciones químicas no son la mano.

3

Cuando hay fusiones en los núcleos de las estrellas, los núcleos atómicos tienen que superar la barrera de la fuerza electromagnética que tiende a separar partículas con carga positiva. Tal barrera es establecida por el potencial de Coulomb. Pensemos el caso de puro hidrógeno. Si nos ponemos en un esquema clásico, para que un protón choque con el otro, tiene que tener suficiente energía como para superar la barrera potencial. La energía en cuestión sería la cinética, por lo que solo los que se muevan suficientemente rápido harán fusión.



Los protones se moverán con una distribución dependiente de la temperatura, y lo harán según la de Maxwell-Boltzmann.



Dada una Temperatura (aún desconocida), podemos encontrar v_{rms} si igualamos la energía cinética con la térmica:

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} \mu_p v_{rms}^2 \Rightarrow v_{rms}^2 = \frac{3 k T}{\mu_p}$$

masa reducida choque proton-proton

Si suponemos que solo los que se muevan a una velocidad 10 veces mayor que v_{rms} pueden hacer fusión, entonces: $v = 10 \left(\frac{3 k T}{\mu_p} \right)^{\frac{1}{2}}$. Entonces si igualamos la energía de este protón v/s el potencial

carga H^+

$$\frac{e \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \mu_p v^2 = \frac{1}{2} \cancel{\mu_p} 100 \left(\frac{3 kT}{\cancel{\mu_p}} \right), \text{ ahora si consideramos } r \approx 2 \text{ fm}$$

tal que choquen los nucleos.

Despejando: $T = \frac{2}{300 \text{ K}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx 1.1 \times 10^8 \text{ K}$, unas 7 veces mayor a la del nucleo del Sol (1.5×10^7)

b) La siguiente ecuación, que viene de la distribución de velocidades, nos da la cantidad de partículas que se mueven a una velocidad dada.

$$n_r dr = n_{\text{tot}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

Entonces, la relación entre los átomos que superarían la barrera y los que tienen una velocidad igual a la v_{rms} sería:

$$\frac{n_r}{n_{\text{rms}}} = \frac{\cancel{n_{\text{tot}}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(10v_{\text{rms}})^2/2kT} 4\pi (10v_{\text{rms}})^2 \cancel{dv}}{\cancel{n_{\text{tot}}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv_{\text{rms}}^2/2kT} 4\pi v_{\text{rms}}^2 \cancel{dv}} = 100 e^{-99(mv_{\text{rms}}^2/2kT)}$$

Reemplazando v_{rms} y evaluando $\frac{n_r}{n_{\text{rms}}} = 5.7 \times 10^{-31}$

c) De la P_2 tenemos ya la cantidad de átomos de H, por lo tanto, la cantidad de átomos que podrán reaccionar es:

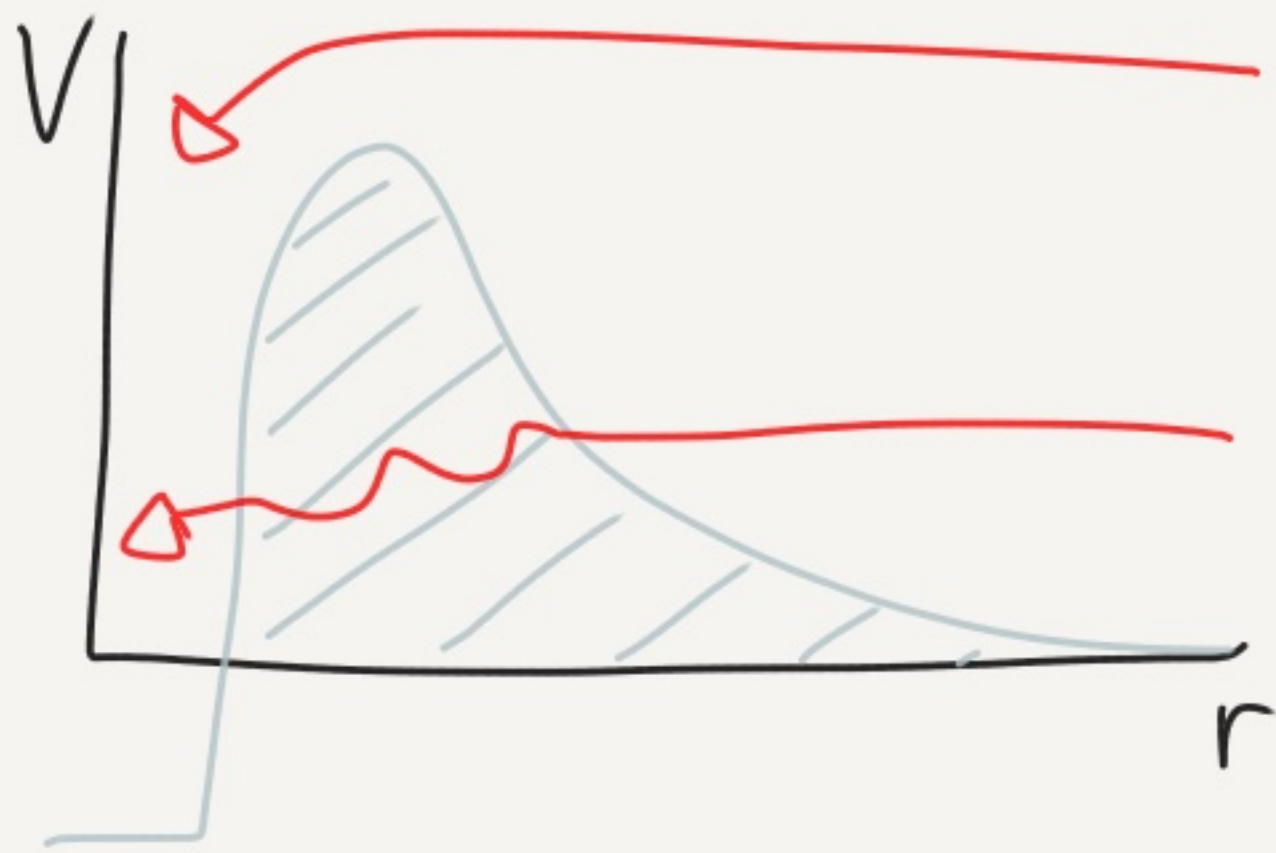
$$N_{\text{react}} = N \left(\frac{n_r}{n_{\text{rms}}} \right) = 7 \times 10^{26}$$

Ahora, queremos encontrar el tiempo que duraría la estrella consumiendo estos átomos, entonces:

$t \approx \frac{E}{L_0}$, Además tenemos que considerar que la fusión solo un 0.7% de la masa se convierte en energía. $\Rightarrow E = 0.007 N_{\text{react}} M_p c^2$

$$\Rightarrow t_{\text{classic}} = \frac{0.007 N_{\text{react}} M_p c^2}{L_0} = \frac{7.2 \times 10^{14} \text{ J}}{3.84 \times 10^{26} \text{ W}} = 2 \times 10^{-12} \text{ s}$$

Es conclusión, el esquema clásico que asumimos no sirve. La clave aquí es que existe el tunneling cuántico, que permite que partículas sin la energía suficiente puedan superar la barrera de Coulomb sin problemas.



P₄

Como el H se fusiona a 10^7 K o más, solo la parte cercana al núcleo se quemará, es decir, un 10% de la masa de la estrella. Acordándonos del 0.007% de masa a energía, la energía disponible sería:

$E_{\text{tot}} = 0.1 \times 0.007 \times M_{\star} c^2$. Asumiendo que la luminosidad se mantiene constante durante la SP.

$$t_{\text{sp}} = \frac{E_{\text{tot}}}{L_{\star}} = 0.0007 c^2 \frac{M_{\star}}{L_{\star}} \approx 10^{10} \left[\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right] \left[\frac{L_{\odot}}{L_{\star}} \right] \text{ yr}$$

Dada la relación $\frac{L_{\star}}{L_{\odot}} \sim \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^4 \Rightarrow t_{\text{sp}} \approx 10^{10} \left[\frac{M_{\odot}}{M_{\star}} \right]^3$, solo depende de la masa

P5

Usando la ecuación que encontramos

$$\star_1: M_{\star} = 0.072 M_{\odot} \Rightarrow t_{\text{sp}} = 2.7 \times 10^{13} \text{ yr}$$

$$\star_2: M_{\star} = 85 M_{\odot} \Rightarrow t_{\text{sp}} = 1.6 \times 10^4 \text{ yr}$$