MA5201 Caculabilidad y Complejidad Computacional.
Profesor: Marcos Kiwi.
Auxiliares: Benjamín Jauregui y Bernardo Subercaseaux
Fecha: 29 de abril de 2021.

Auxiliar 5

Jerarquia Aritmetica

Decimos que una relación k-aria $R \subseteq (\Sigma^*)^k$ es **decidible** si el lenguaje

$$L_R = \{x_1\#x_2\#...\#x_k\colon (x_1, ..., x_k) \in R\}$$

Es decidible, donde el símbolo # no es parte del alfabeto Σ.

Definimos Σ_k, para $k \geq 0$, como la clase de todos los lenguajes L para los cuales existe una relación $(k+1)$-aria decidible R tal que

$$L = \{x\colon \exists x_1 \forall x_2 ... Q_k x_k \text{ tal que } (x_1, ..., x_k, x) \in R\}$$

Con

$$Q_k = \begin{cases} \exists & k \text{ impar} \\ \forall & k \text{ par} \end{cases}$$

Definimos con esto $\Pi_k = \mathbf{co}\Sigma_k$. Se define la *Jerarquía Aritmética* como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Sigma_i$

1. Muestre que para todo $k \geq 0$, Π_k es la clase de lenguajes L tales que existe una relación decidible tal que

$$L = \{x\colon \forall x_1 \exists x_2 ... \overline{Q_k} x_k \text{ tal que } (x_1, ..., x_k, x) \in R\}$$

2. Muestre que $\Sigma_0 = \Pi_0$ y corresponden a los lenguajes decidibles y Σ_1 corresponde a los lenguajes reconocibles.

3. Muestre que para todo $i \geq 0$, $\Sigma_{i+1} \supseteq \Sigma_i, \Pi_i$.

4. Muestre que Σ_2 es la clase de todos los lenguajes que pueden ser aceptados (no necesariamente decididos) por mT's que tienen la siguiente función especial: Dado un input w, en cualquier momento de la computación la máquina puede entrar a un estado especial $q_?$ y el siguiente estado será q_{si} o q_{no}, dependiendo si el contenido actual de la cinta es una codificación $\langle M, x\rangle$ tal que M es una máquina de Turing que se detiene en la entrada x. Denote por M_H a estas máquinas de Turing con este oráculo en particular.

Se puede extender la parte **4.** y probar que para todo $i \geq 0$, se cumple que los lenguajes en Σ_i son los lenguajes que son aceptados por máquinas de Turing con un oraculo sobre el lenguaje HALT^i, con

$$\text{HALT}^i = \begin{cases} \emptyset & i = 0 \\ \text{HALT} & i = 1 \\ \{\langle M, \omega\rangle\colon M \text{ es una mT con un oraculo en HALT}^{i-1} \text{ que para en } \omega\} & i \geq 2 \end{cases}$$

5. Muestre que para todo i, $\Sigma_{i+1} \neq \Sigma_i$.

6. Muestre que el lenguaje $\text{ALL} = \{\langle M\rangle\colon L(M) = \Sigma^*\}$ esta en $\Pi_2 \backslash \Pi_1$.

7. **(Propuesto)** Demuestre que $\text{INF} = \{\langle M\rangle\colon L(M) \text{ es infinito}\}$ esta en $\Pi_2 \backslash \Pi_1$