

MA4401-1 Procesos de Markov**Profesor:** Daniel Remenik**Auxiliares:** Pablo Araya.

Tristan Radic

Fecha: : 30 de Abril de 2021**Auxiliar 6: Medida Invariante****Resumen**

Def 1. Sea P matriz estocástica y μ una medida sobre I . Diremos que μ es una **medida invariante** para P si $\mu = \mu P$. Si además μ es una medida de probabilidad, entonces diremos que es una **Distribución Invariante**.

Def 2. Sea i un estado recurrente. Decimos que i es **recurrente positivo** si su tiempo de retorno esperado es finito, es decir, si $\mathbb{E}_i(\tau_i) < \infty$. En caso contrario, decimos que i es **recurrente nulo**.

Teo 1. Sea X irreducible. Las siguientes son equivalentes:

- Existe un estado recurrente positivo.
- Todos los estados son recurrentes positivos.
- Existe una distribución invariante.

Si alguna de las anterior condiciones se cumple entonces la medida invariante es única y tiene la siguiente forma:

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}_i(\tau_i)}$$

Def 3. Se define el número esperado de visitas a i antes de retornar a k como:

$$\gamma_i^k = \mathbb{E}_k \left(\sum_{n=0}^{\tau_k-1} 1_{X_n=i} \right)$$

Prop 1. Sea P irreducible y recurrente.

- $\gamma_k^k = 1$
- γ^k es medida invariante (es decir $\gamma^k P = \gamma^k$)
- $\gamma_i^k \in (0, \infty) \quad \forall i \in I$

Más aún, $\mu = \gamma^k$ es la única medida invariante tal que $\mu_k = 1$

Problemas**P1. Paseo aleatorio en un Grafo**

Sea $G = (E, V)$ un grafo conexo (con $0 < |V| < \infty$), se define el paseo aleatorio en el grafo G como la cadena de Markov (X_n) con matriz de transición:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/v_i & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Con v_i el número de aristas del vértice i .

(a) Se define $v = (v_i : i \in G)$.

Demuestre que v es medida invariante y concluya que si $\sigma = \sum_{i \in G} v_i$ entonces $\pi = v/\sigma$ es distribución invariante.

Obs: Note que v también sería medida invariante para el caso $|V| = |\mathbb{N}|$, en ese caso $\mathbb{P}(X_n)$ podría ser recurrente positivo?

(b) Ahora el grafo G esta dado por un cubo, donde V son los vértices del cubo y E sus aristas. Sea i el vértice donde comienza la cadena de Markov y o vértice opuesto.

- i) Calcule la esperanza de la cantidad de pasos antes de volver a i .
- ii) Calcule el número esperado de visitas a o antes de retornar a i .

(c) Considere ahora una variable de $Z \sim \text{Geométrica}[p]$ con $p \in (0, 1)$ y un grafo aleatorio $G = (V, E)$ tal que $V = \{1, 2, \dots, Z-1, Z\}$ y $E = \{(i, j) \in V \times V : j = i + 1\}$ (es decir el grafo es una linea recta de tamaño Z). Sobre ese grafo se desarrolla un paseo aleatorio (X_n) partiendo del extremo $i = 1$ y se pide calcular la esperanza de la cantidad de pasos antes de volver al extremo $i = 1$.

(d) [Propuesto] Considere un tablero de ajedrez y sobre el cual un rey se mueve de forma aleatoria, cada uno de los movimientos permitidos tienen la misma probabilidad, si el rey parte en un vértice calcule:

- i) El número de pasos esperados antes de que vuelva a dicho vértice.
- ii) El número de visitas esperadas al vértice contrario antes de volver al vértice original.

P2. [Teoría de Colas] Considere una cola de atención de clientes a tiempos discretos, donde cada instante se denota por $n \in \mathbb{N}$. En cada instante llega un cliente con probabilidad $p \in (0, 1)$ y no llegan clientes con probabilidad $1 - p$. Durante cada intervalo de tiempo en que hay al menos un cliente en la cola, un cliente es atendido y sale de la cola con probabilidad $q \in (0, 1)$ y no se va ningún cliente con probabilidad $1 - q$. Denote por X_n la cantidad de clientes en la cola en el instante n .

En el auxiliar de la semana pasada se concluyó que:

$$X_n = X_{n-1} - Z_n 1_{X_{n-1} > 0} + Y_n$$

Con Y_n una Bernoulli(p) y Z_n una Bernoulli(q).

Además se probó que para $p > q$ la cadena es transiente. Para concluir nuestro estudio de esta cadena resta ver que:

(a) Muestre que en el caso $p = q$ la medida:

$$\mu = (1 - p, 1, 1, \dots)$$

cumple la condición de invarianza. ¿Puede ser la medida anterior una distribución invariante?

(b) Considere el caso en que $p < q$, vea que la medida μ definida por:

$$\mu_0 = \frac{q - p}{q}$$

$$\mu_n = \left(\frac{p(1 - q)}{q(1 - p)} \right)^n \frac{q - p}{q(1 - q)}$$

es distribución invariante.