Auxiliar 3

Lema de bayes y probabilidades totales.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Bruno Hernández

1 Resumen

- **Teorema: (Ley de probabilidades totales)** Suponga que $\{B_1, \cdots, B_k\}$ es una partición de $\mathcal{S}$, tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, para $i = 1, \cdots, k$. Entonces para cualquier evento A:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \cap B_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i) \end{aligned}$$

- **Teorema: (Lema de Bayes)** Sean A y B dos eventos, tales que $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

2 Preguntas

P1. Sea un evento B, tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Para todo evento A, definimos la función $\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

1. Pruebe que $\hat{\mathbb{P}}$ es una función de probabilidad.
2. Muestre que $\hat{\mathbb{P}}(\overline{A}) = 1 - \hat{\mathbb{P}}(A)$. Donde $\overline{A}$ es el complemento de A.

P2. Un estudiante es mandado al frente de su curso de probabilidades y estadísticas, para resolver un problema numérico. Él sabe que la respuesta es alguno de los números enteros entre 1 y k ($\{1, \cdots, k\}$). Resolviendo el problema, el estudiante podría encontrar la forma correcta de razonar o errar en el intento. El nivel de estudio del compañero es tal que puede encontrar la forma correcta de resolver el problema con una probabilidad p. Por lo tanto, tomando el complemento sabemos que la probabilidad de errar en este problema es $1 - p$, en este caso asumiremos que el estudiante podría dar cualquiera de los números entre 1 y k como respuesta, con igual probabilidad $(1/k)$.

Si al final, el alumno dice la respuesta, y esta es la correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente haya hecho bien el ejercicio y no lo haya tirado "al achunte"?

P3. El “alcohotest”, utilizado por la policía para verificar si los conductores exceden el límite legar del porcentaje de alcohol en la sangre al manejar, es conocido por satisfacer lo siguiente:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = p$$

donde A es el evento “El alcohotest indica que se ha excedido el límite legal”, mientras que B corresponde al evento “El porcentaje de alcohol en sangre excede al límite legal” (note que existe una gran diferencia entre estos sucesos).

La noche del sábado, el 5 % de los conductores evaluados, son retenidos por exceder el test.

- Describe en palabras el significado de $\mathbb{P}(B^c|A)$.
- Determine $\mathbb{P}(B^c|A)$, si $p = 0{,}95$.
- ¿Qué tan grande tiene que ser p para que $\mathbb{P}(B|A) = 0{,}9$?

P4. Sea $n \in \mathbb{N}$.
Sean $2n$ bolas, donde n bolas son blancas y n bolas son negras. Suponga que tiene 2 cajas y realiza el siguiente experimento: se seleccionan n bolas al azar de las $2n$ y se colocan en una de las cajas, dejando las n restantes en la otra caja. Usted se queda con la primera caja.

1. Sea $k \in \{1, \cdots, n\}$ fijo. Calcule la probabilidad de que hayan exáctamente k bolas blancas en la caja.
2. Justifique por qué la probabilidad de sacar una bola blanca de la caja es $1/2$
3. Utilice los dos puntos anteriores y el teorema de probabilidades totales para concluir la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$$

Soluciones.

P1. *a*) Para ver que $\hat{\mathbb{P}}$ es una función de probabilidad, debe cumplir las siguientes 3 propiedades; 1.- para todo evento A, $\hat{\mathbb{P}}(A)$ debe estar entre 0 y 1. Para esto notemos que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{P}}(A) &= \mathbb{P}(A|B)\\ &= \tfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\end{aligned}$$

Tanto $\mathbb{P}(A\cap B)$ como $\mathbb{P}(B)$ son positivos, por lo tanto $\hat{\mathbb{P}}(A) \geq 0$. Además, como $A\cap B \subseteq B$, entonces $\mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(B)$, de esta forma $\hat{\mathbb{P}}(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq 1$.

También es necesario que la probabilidad del espacio muestral $\mathcal{S}$ sea 1. Notamos que:

$$\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{S}) = \mathbb{P}(\mathcal{S}|B) = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{S}\cap B)}{B} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

Por último, para una familia de eventos disjuntos $\{A_1, A_2, \cdots\}$ tenemos que

$$\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\geq 1}(A_i\cap B),$$

además la familia de los conjuntos $A_i\cap B$ sigue siendo disjunta. Por lo tanto

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \frac{\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)\cap B\right]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1}(A_i\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ocupando que la función $\mathbb{P}$ es de probabilidad y separa las uniones disjuntas en forma de suma, tenemos que

$$\frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1}(A_i\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i\leq 1}\frac{\mathbb{P}(A_i\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(A_i|B) = \sum_{i\geq 1}\hat{\mathbb{P}}(A_i).$$

Así concluímos que la función $\hat{\mathbb{P}}$ es de probabilidad.

b) Notamos que, para cualquier evento A tenemos:

$$\mathcal{S} = A\cup\overline{A}$$

intersectado a ambos lados con B:

$$\mathcal{S}\cap B = \left(A\cup\overline{A}\right)\cap B$$

$$\Rightarrow B = (A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B).$$

Como la unión de A y $\overline{A}$ inicialmente es dijunta, entonces también lo será la unión de $(A\cap B)$ con $(\overline{A}\cap B)$. Así, aplicando la función de probabilidad $\mathbb{P}$ y separando la unión disjunta con la suma, tenemos:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(\overline{A}\cap B).$$

Basta con dividir a ambos lados por $\mathbb{P}(B) > 0$ para notar que

$$1 = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{A}|B)$$

$$\Rightarrow 1 = \hat{\mathbb{P}}(A) + \hat{\mathbb{P}}(\overline{A}) \Rightarrow \hat{\mathbb{P}}(\overline{A}) = 1 - \hat{\mathbb{P}}(A)$$

P2. Para el siguiente ejercicio haremos los siguientes supuestos: Sea el evento E definido como

$$E = \text{“El estudiante sabía hacer el ejercicio”}$$

Con lo que $\mathbb{P}(E) = p$, en este caso el estudiante dirá la respuesta correcta con probabilidad 1, ya que había estudiado para saber hacer el ejercicio.
En el caso de $\overline{E}$, es decir “El estudiante no sabía cuál era la respuesta correcta”, asumiremos que tiró una das las posibles k respuestas al azar. Con esto, asumiendo $\overline{E}$, el estudiante tiene $1/k$ probabilidad de acertar.
Podemos resumir lo explicado anteriormente de la siguiente forma: Sea

$$D = \text{“El estudiante DICE la respuesta correcta”}$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(D|E) = 1$$
$$\mathbb{P}(D|\overline{E}) = 1/k.$$

Si el estudiante dice la respuesta correcta (contexto D), ¿cuál es la probabilidad de que realmente haya sabido ahcer el ejercicio? Es decir, ¿cuánto es $\mathbb{P}(E|D)$?. Ocupando el lema de Bayes:

$$\mathbb{P}(E|D) = \frac{\mathbb{P}(D|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{1 \cdot p}{\mathbb{P}(D)}$$

Tan sólo bastaría con encontrar la probabilidad total de decir la respuesta correcta, $\mathbb{P}(D)$. Gracias al lema de probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(D|\overline{E})\mathbb{P}(\overline{E})$$

$$\mathbb{P}(D) = p + (1 - \frac{1}{k})(1 - p)$$

Así,

$$\mathbb{P}(E|D) = \frac{p}{p + (1 - \frac{1}{k})(1 - p)}$$

P3. *a*) Describe en palabras $\mathbb{P}(B^c|A)$: “Dado A, con qué probabilidad no ocurre B”. Es decir, dado que el alcohotest idica que se ha excedido el límite legar, cuál es la probabilidad de que realmente mi sangre no contenga el porcentaje de alcohol suficiente para sobrepasar el límite legal. En conclusión, la probabilidad de que el test me inculpe injustamente.

b) Determinar $\mathbb{P}(B^c|A)$: Ocupando el lema de bayes,

$$\mathbb{P}(B^c|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Notamos que

$$\mathbb{P}(A|B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B^c) = 1 - p$$

$$\mathbb{P}(A) := \beta = 0{,}05, \quad 5\,\% \text{ enunciado}$$

Basta calcular la probabilidad $\mathbb{P}(B^c)$, para esto ocuparemos el teorema de probabilidades totales para el evento A asumiendo que $\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(B^c) > 0$:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Aplicando la ley del complemento podemos dejar todo en función de B^c:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)(1 - \mathbb{P}(B^c)) + (1 - \mathbb{P}(A^c|B^c))\mathbb{P}(B^c)$$

$$\beta = p(1 - \mathbb{P}(B^c)) + (1 - p)\mathbb{P}(B^c)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B^c) = \frac{\beta - p}{(1 - 2p)}$$

Reemplazando todo en la probabilidad inicialmente pedida:

$$\mathbb{P}(B^c|A) = \frac{(1 - p)}{\beta}\frac{\beta - p}{1 - 2p}$$

(reemplazar $\beta = 0{,}05$ y $p = 0{,}95$

c) Finalmente basta notar que

$$\mathbb{P}(B|A) = 1 - \mathbb{P}(B^c|A)$$

donde $\mathbb{P}(B^c|A)$ corresponde a lo calculado en la parte anterior.

P4. *a*) Considerando que cada bola tiene igual probabilidad de ser sacada, imponemos que el espacio de probabilidades de este experimento es un espacio equiprobable. Así calcularemos la probabilidad de que hayan exáctamente k bolas calculado los casos favorables y los casos totales.

Para imponer que hayan k bolas blancas, es necesario sacar tales k bolas blancas del total de n bolas blancas que hay. Las formas de hacer esta elección es la siguiente combinatoria

$$\#\text{ sacar } k \text{ bolas blancas} = \binom{n}{k}.$$

Como queremos que hayan exáctamente k bolas blancas (no más ni menos), debemos imponer que las $n - k$ bolas restantes en la elección sean negras. Nuevamente las formas de sacar $n - k$ bolas negras de un total de n es otra combinatoria:

$$\#\text{ sacar } n-k \text{ bolas negras} = \binom{n}{n-k}.$$

Así, como estas elecciones (de bolas blancas y negras) son independientes una de la otra, el principio de multiplicación nos dice que

$$\#\text{ tener exáctamente } k \text{ bolas blancas en un total de } n \text{ bolas} = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$$

Para la última igualdad ocupamos el hecho de que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (**PROPUESTO**). Finalmente, ocupando que el total de formas en que se pueden sacar n bolas cualesquiera de un total de $2n$ es

$$\# \text{ formas totales de sacar } n \text{ bolas del total de } 2n = \binom{2n}{n}$$

Concluímos que

$$\mathbb{P}(\text{tener exáctamente } k \text{ bolas blancas}) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

b) Para cada realización de este experimento existe un número k entre 0 y n, que representa el número de bolas blancas que hay en mi caja. Como las bolas restantes está en la otra caja, entonces la otra caja tiene $n-k$ bolas blancas.
Dado que cada extracción de bolas es equiprobable, entonces yo podría tener la caja con k bolas blancas con probabilidad $1/2$ o la caja con $n-k$ bolas blancas con probabilidad $1/2$. Sean los eventos:

$$S = \text{“sacar una bola blanca”}$$

$$A_k = \text{“Elegir la caja con } k \text{ bolas blancas”}$$

$$A_{n-k} = \text{“Elegir la caja con } n-k \text{ bolas blancas”}$$

Notamos que, $\overline{A_k} = A_{n-k}$ y que $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_{n-k}) = 1/2$. Aplicando probabilidades totales.

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|A_k)p(A_k) + \mathbb{P}(S|A_{n-k})\mathbb{P}(A_{n-k})$$

$$\mathbb{P}(S) = \frac{k}{n}\frac{1}{2} + \frac{n-k}{n}\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

En conclusión, por cada configuración de k bolas blancas hecha, hay una con $n-k$ bolas blancas que posee la misma probabilidad de ser elegida, así que ocupando probabilidades totales tengo $1/2$ probabilidad de sacar una bola blanca de este experimento.

c) Siguiendo la misma lógica del paso anterior, ahora sin fijar el número de bolas blancas en la caja, ocupo probabilidades totales para considerar todos los posibles k (cantidad de bolas blancas) que puedan aparecer en la caja escogida. Definimos los eventos.

$$S = \text{“sacar una bola blanca del experimento”}$$

$$A_k = \text{“La caja escogida tiene exáctamente } k \text{ bolas blacas”}$$

Notamos que la probabilidad $\mathbb{P}(A_k)$ fue el resultado obtenido en la parte *a*). Además sabemos que si la caja tiene exáctamente k bolas blancas, tengo k/n probabilidades de sacar una bola blanca al sacar una al azar, esto es, $\mathbb{P}(S|A_k) = k/n$.
Ocupando probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S|A_k)\mathbb{P}(A_k)$$

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

Recordando que $\mathbb{P}(S) = 1/2$, concluímos que

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$$