

Auxiliar 3

Lema de bayes y probabilidades totales.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Bruno Hernández

1 Resumen

- **Teorema: (Ley de probabilidades totales)** Suponga que $\{B_1, \dots, B_k\}$ es una partición de $\mathcal{S}$, tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0$, para $i = 1, \dots, k$. Entonces para cualquier evento A :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)\end{aligned}$$

- **Teorema: (Lema de Bayes)** Sean A y B dos eventos, tales que $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

2 Preguntas

P1. Sea un evento B , tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Para todo evento A , definimos la función $\hat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(A|B)$.

1. Pruebe que $\hat{\mathbb{P}}$ es una función de probabilidad.
2. Muestre que $\hat{\mathbb{P}}(\bar{A}) = 1 - \hat{\mathbb{P}}(A)$. Donde $\bar{A}$ es el complemento de A .

P2. Un estudiante es mandado al frente de su curso de probabilidades y estadísticas, para resolver un problema numérico. Él sabe que la respuesta es alguno de los números enteros entre 1 y k ($\{1, \dots, k\}$). Resolviendo el problema, el estudiante podría encontrar la forma correcta de razonar o errar en el intento. El nivel de estudio del compañero es tal que puede encontrar la forma correcta de resolver el problema con una probabilidad p . Por lo tanto, tomando el complemento sabemos que la probabilidad de errar en este problema es $1 - p$, en este caso asumiremos que el estudiante podría dar cualquiera de los números entre 1 y k como respuesta, con igual probabilidad ($1/k$).

Si al final, el alumno dice la respuesta, y esta es la correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente haya hecho bien el ejercicio y no lo haya tirado “al achunte”?

- P3.** El “alcoholtest”, utilizado por la policía para verificar si los conductores exceden el límite legal del porcentaje de alcohol en la sangre al manejar, es conocido por satisfacer lo siguiente:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = p$$

donde A es el evento “El alcoholtest indica que se ha excedido el límite legal”, mientras que B corresponde al evento “El porcentaje de alcohol en sangre excede al límite legal” (note que existe una gran diferencia entre estos sucesos).

La noche del sábado, el 5 % de los conductores evaluados, son retenidos por exceder el test.

- Describe en palabras el significado de $\mathbb{P}(B^c|A)$.
- Determine $\mathbb{P}(B^c|A)$, si $p = 0,95$.
- ¿Qué tan grande tiene que ser p para que $\mathbb{P}(B|A) = 0,9$?

- P4.** Sea $n \in \mathbb{N}$.

Sean $2n$ bolas, donde n bolas son blancas y n bolas son negras. Suponga que tiene 2 cajas y realiza el siguiente experimento: se seleccionan n bolas al azar de las $2n$ y se colocan en una de las cajas, dejando las n restantes en la otra caja. Usted se queda con la primera caja.

1. Sea $k \in \{1, \dots, n\}$ fijo. Calcule la probabilidad de que hayan exactamente k bolas blancas en la caja.
2. Justifique por qué la probabilidad de sacar una bola blanca de la caja es $1/2$
3. Utilice los dos puntos anteriores y el teorema de probabilidades totales para concluir la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$$