Auxiliar 1

Axiomas de probabilidades y problemas de conteo.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Bruno Hernández

Resumen:

1. **Propiedades de conjuntos:** Sean A y B dos conjuntos.
   - *Leyes distributivas.*

     $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

     $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

   - *Leyes de Morgan:*

     $$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

     $$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2. **Definición:** Sea $\mathcal{S}$ un espacio muestral asocuado a un experimento. A todo evento A en $\mathcal{S}$ le asignamos un número $\mathbb{P}(A)$, llamado *probabilidad* de A, de modo que se cumplen los siguientes axiomas:

   A1: $\mathbb{P}(A) \geq 0$

   A2: $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1$

   A3: Si A_1, A_2, A_3,... forman una secuencia de eventos disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces:

   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

3. Propiedades de conteo: 1.-El número de maneras de ocupar r posiciones diferentes usando n objetos distinguibles (con $r \leq n$) es:

   $$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   2.- El número de ordenar n elementos, donde n_1 son indistinguebles, n_2 son indistinguibles, ... n_k son indistinguibles (con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$) es:

   $$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

   Este número se aplica también si quiero repartir n elementos distintos en k grupos distintos.

   3.-Dado un conjunto A de tamaño n, el número de subconjuntos de A de tamaño r es

   $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

P1. Usando los axiomas de probabilidad pruebe que: sean E y F eventos cualquiera del espacio muestreal $\mathcal{S}$, entonces:

a) $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$

b) Si $E \subseteq F$, entonces $\mathbb{P}(F \backslash E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$

c) $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

d) $\mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E \cap F)$

e) $\mathbb{P}(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \cap F)$

P2. A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que construir una comisión de investigación de 2 matemáticos y 3 físicos, ¿De cuántas formas podría hacerse si:

a) todos son elegibles?

b) Juan, uno de los físicos, debe siempre estar en la comisión.

c) Pablo y Nicolás, dos de los matemáticos, se odian a muerte, nunca pueden quedar ambos juntos en la comisión.

P3. Considere un grupo de n personas. Calculando de dos maneras el número de posibles elecciones del comité y un jefe del comité muestre que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

SOLUCIONES:

P1. *a*) Notemos primero que $E \cap \overline{E} = \emptyset$, dado que ningún elemento "puede estar y no estar al mismo tiempo" en el conjunto E. Por lo tanto podemos afirmar que E y $\overline{E}$ son disjuntos, por lo tanto:

$$\mathbb{P}(E \cup \overline{E}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\overline{E})$$

por las propiedades de la función $\mathbb{P}$. Luego como $E \cup \overline{E} = \mathcal{S}$, tenemos que:

$$\mathbb{P}(E \cap \overline{E}) = \mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1$$

Así,

$$1 = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\overline{E})$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

b) Como E está incluído en F, podemos separar a los elementos del conjunto F en dos opciones: 1.- estar en E ó 2.- estar en F pero no en E, la segunda opción se escribe como $F \backslash E$. Por lo tanto:

$$F = E \cup F \backslash E$$

Nuevamente, como un elemento no puede estar en E y no estar en E al mismo tiempo, los conjuntos E y $F \backslash E$ son disjuntos ($E \cap F \backslash E$), por lo tanto:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \backslash E)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(F \backslash E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$$

c) Sean E y F dos conjuntos cualesquiera, entonces los elementos $x \in E \cup F$ los podemos separar en dos casos: 1.- el primero son los casos en que $x \in E$ (esto considera también el caso en que $x \in E \cap F$), 2.- el segundo es en que x no está en E, pero como está en $E \cup F$, entonces sólo está en F (sin contar $E \cap F$, pues esta parte se considera en el caso anterior), esto es $x \in F \backslash (E \cap F)$. Así

$$E \cup F = E \cup [F \backslash (E \cap F)]$$

Notamos que $E \cap [F \backslash (E \cap F)] = \emptyset$, pues dijimos que $F \backslash (E \cap F)$ no considera nada de E. Así, estos conjuntos son disjuntos y

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \backslash (E \cup F))$$

Luego, como $(E \cap F) \subseteq F$, por la parte anterior (parte d), tenemos que

$$\mathbb{P}(F \backslash (E \cap F)) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

d) Para todo elemento $x \in E$, puedo obtener dos casos: 1.- x está en E **y** está en F (sea cual sea el conjunto F) ó, 2.- x está en E **y no** está en F. El primer caso lo podemos anotar como $x \in E \cap F$, y el segundo como $x \in E \cap \overline{F}$. Como todos los elementos de E

cumplen al menos una de estas condiciones, tenemos que

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$$

Luego, como un elemento no puede estar y no estar a la vez en el conjunto F, esta unión es disjunta, es decir $(E \cap F) \cap (E \cap \overline{F}) = \emptyset$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap \overline{F})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

e) Por las *Leyes de Morgan*, tenemos que:

$$\overline{E} \cap \overline{F} = \overline{E \cup F}$$

Aplicando la propiedad anterior al complemento (parte a), tenemos que:

$$\mathbb{P}(\overline{E} \cap \overline{F}) = \mathbb{P}(\overline{E \cup F}) = 1 - \mathbb{P}(E \cup F)$$

Luego, aplicando la propiedad de la unión demostrada anteriormente (parte c), tenemos que

$$\mathbb{P}(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - [\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)]$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \cap F)$$

P2. *a*) Usando el principio de la multiplicación, podemos separar la elección de matemáticos y la elección de físicos como eventos independietes y calcularlos por separados, luego de haber hecho esto teneos que:

$$\text{Total de formas} = \text{Opciones de matemmáticos} \times \text{Opciones de físicos}$$

Basta con elegir 2 matemáticos de un conjunto de 5 de ellos, como en esta elección no importa el orden en que se elijan, la cantidad de formas va a estar determinada por un coeficiente binomial (combinatoria):

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Así mismo con el conjunto de los físicos; sin importatr el orden, elegimos 3 físicos de un total de 7 de ellos:

$$C_3^7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Finalmente, por lo ya dicho:

$$\text{Formas totales} = C_2^5 \times C_3^7 = 10 \times 35 = 350$$

b) Siguiendo la misma lógica de la parte **a)**, ocupando el principio de la multiplicación, notamos que las maneras de seleccionar matemáticos no cambian. Sólo nos queda recalcular las formas de seleccionar físicos agregando la nueva condición dada: Para esto fijamos uno de los cupos para la comisión, pues está reservado para Juan, por lo tanto debemos elegir a los 2 físicos restantes de un total de 6 de ellos (todos menos Juan):

$$C_2^6 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

Por lo tanto, recordando el resultado de la parte **a)**, en que las formas de sacar matemáticos eran C_2^5:

$$\text{Formas totales} = C_2^5 \times C_2^6 = 10 \times 15 = 150$$

c) En este caso, las formas de elegir los físicos no cambian de la parte **a)**, por lo tanto sólo tenemos que calcular las formas de elegir a los matemáticos.
Para ello, del total de casos, descontamos el caso perjudicial en el que elegimos a ambos en la comisión. Como sólo hay dos matemáticos en la comisión, existe sólo una forma en que estas dos personas queden juntas, entonces:

$$\text{Casos favorables} = \text{Casos totales matemáticos} - 1$$

$$= C_2^5 - 1 = \binom{5}{2} - 1$$

Finalmente la cantidad de formas de elección en este caso son:

$$\text{Casos totales} = (C_2^5 - 1) \times C_3^7 = (\binom{5}{2} - 1) \times \binom{7}{3} = \binom{5}{2} \times \binom{7}{3} - \binom{7}{3} = 10 \times 35 - 35 = 315$$

P3. **Primera manera:** La primera manera de elegir un comité es fijar de antemano la cantidad de personas que puedan conformarlo. Supongamos que el comité es de un tamaño fijo k. Como el comité debe tener al menos una persona (Jefe del comité), entonces k va a tener como mínimo 1 (caso en que el jefe está solo) y como máximo n (caso en que todo el mundo está en el comité).

Sea A_k el conjunto de todos los diferentes comités que se puedan formar con k personas de entre las n totales. Elegir k personas de un total de n personas se puede hacer de

$$C_k^n = \binom{n}{k} \quad \text{maneras}$$

Sin embargo, por cada una de esas agrupaciones de k personas, yo tengo la opción de formar diferentes comités, sólamente eligiendo a diferentes jefes. Si tengo k personas entonces tengo k formas diferentes de asignarle el rol de jefe a cada uno de ellos (formando diferentes comités). Por lo tanto, por el principio del producto, la cantidad de maneras de formar comités de tamaño k es:

$$|A_k| = \binom{n}{k} k$$

Ahora, como los comités tienen un tamaño fijo (no existe comité que tenga 3 personas y tengo 5 personas al mismo tiempo), entonces $A_k \cap A_m$, cuando $k \neq m$, y entonces, las maneras de crear comités **de cualquier tamaño** es:

$$\text{Cantidad de comités} = |\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

En la última igualdad, la suma puede partir de 0 pues el coeficiente 0 es cero, es decir $k\binom{n}{k}$ evaluando $k = 0$ es cero, entonces puedo partir desde cero sin cambiar el valor de la suma.

Segunda manera: Como cada comité debe tener un jefe, entonces podría partir eligiendo la cantidad de jefes que puedan conformar estos comités. Cada una de las n personas puede ser jefe, por lo tanto tengo n formas de elegir a un jefe.

Luego de haber asignado a un jefe, nos quedan $n-1$ personas que podrían (o no) estar enuna comisión, ¿de cuántas formas puedo formar el equipo del comité con estas $n-1$ personas? Podemos ocupar el principio del producto para decir lo siguiente: cada persona, independientemente de las otras, tiene dos opciones 1.- estar en el comité o 2.- no estar en el comité. Entonces por cada persona tendremos el doble de opciones de comités, por lo tanto, la cantidad de comités (sin jefe) que se pueden formar con $n-1$ personas es:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^{n-1}$$

Luego, como el principio del producto me dice que

$$\text{Cantidad de comités} = \textbf{Formas de elegir al jefe} \times \text{formas de elegir a su equipo}$$

Entonces

$$\text{Cantidad de comités} = n2^{n-1}$$

Finalmente, como ambas maneras cuentan la misma cantidad, podemos decir que estamos hablando del mismo resultado, y

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$