Auxiliar 1

Axiomas de probabilidades y problemas de conteo.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Bruno Hernández

Resumen:

1. **Propiedades de conjuntos:** Sean A y B dos conjuntos.
   - *Leyes distributivas.*

     $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

     $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

   - *Leyes de Morgan:*

     $$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

     $$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2. **Definición:** Sea $\mathcal{S}$ un espacio muestral asocuado a un experimento. A todo evento A en $\mathcal{S}$ le asignamos un número $\mathbb{P}(A)$, llamado *probabilidad* de A, de modo que se cumplen los siguientes axiomas:

   A1: $\mathbb{P}(A) \geq 0$
   A2: $\mathbb{P}(\mathcal{S}) = 1$
   A3: Si A_1, A_2, A_3,... forman una secuencia de eventos disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces:

   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

3. Propiedades de conteo: 1.-El número de maneras de ocupar r posiciones diferentes usando n objetos distinguibles (con $r \leq n$) es:

   $$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

   2.- El número de ordenar n elementos, donde n_1 son indistinguebles, n_2 son indistinguibles, ... n_k son indistinguibles (con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$) es:

   $$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

   Este número se aplica también si quiero repartir n elementos distintos en k grupos distintos.

   3.-Dado un conjunto A de tamaño n, el número de subconjuntos de A de tamaño r es

   $$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

P1. Usando los axiomas de probabilidad pruebe que: sean E y F eventos cualquiera del espacio muestreal $\mathcal{S}$, entonces:

a) $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$

b) Si $E \subseteq F$, entonces $\mathbb{P}(F \backslash E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$

c) $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

d) $\mathbb{P}(E \cap \overline{F}) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E \cap F)$

e) $\mathbb{P}(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \cap F)$

P2. A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que construir una comisión de investigación de 2 matemáticos y 3 físicos, ¿De cuántas formas podría hacerse si:

a) todos son elegibles?

b) Juan, uno de los físicos, debe siempre estar en la comisión.

c) Pablo y Nicolás, dos de los matemáticos, se odian a muerte, nunca pueden quedar ambos juntos en la comisión.

P3. Considere un grupo de n personas. Calculando de dos maneras el número de posibles elecciones del comité y un jefe del comité muestre que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$