MA3403-2. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 9 de julio de 2021

Auxiliar 12

Teorema 1 (Teorema Central del Límite). *Si $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias iid con media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, y $S_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$, entonces*

$$Z_n = \frac{(S_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una normal estándar. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

donde Φ es la función de distribución de una $\mathcal{N}(0,1)$.

Definición 1. Una Muestra Aleatoria Simple es una colección de v.a.'s $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d referentes a una variable aleatoria X.

Definición 2. Un Estadístico es una función de la muestra: $e = e(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Definición 3. Un estimador $\hat{\theta}$ para el parámetro θ es un estadístico que se utiliza para aproximar θ. Diremos que un estimador es **Insesgado**: Si $E(\hat{\theta}) = \theta$ y será sesgado si $E(\hat{\theta}) \neq \theta$. Notar que $\hat{\theta}$ es una v.a mientras que θ es un valor.

Definición 4. Se define el **Error Cuadrático Medio** con respecto al estimador $\hat{\theta}$ como sigue:

$$ECM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = Var(\hat{\theta}) + sesgo(\hat{\theta})^2$$

Donde $sesgo(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

Definición 5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con función de densidad de probabilidad $f(x_i; \theta)$ entonces, el **EMV** (El estimador de máxima verosimilitud) es el valor θ que maximiza $L(\theta)$, con:

$$L(\theta) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)\right)$$

P1. Suponga que Y_1, Y_2 Y_3 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de distribución exponencial, con función de densidad

$$f(y) = \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-y/\theta} \qquad \text{si } y > 0$$

Considere los siguientes 4 estimadores del parámetro θ

$$\hat{\theta}_1 = Y_1, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + 2Y_2}{3}, \quad \hat{\theta}_3 = \min(Y_1, Y_2, Y_3), \quad \hat{\theta}_4 = \bar{Y}$$

a) ¿Cuáles de los estimadores anteriores es insesgado? Como podría modificar los estimadores para que todos sean insesgados?
b) De los estimadores insesgados, ¿Cuál tiene menor varianza y explique porque tiene menor ECM?

P2. Suponga que $Y_1, \ldots, Y_n$ denota una muestra aleatoria de la distribución de Poisson con media λ.

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}$ para λ.

b) Encuentre el valor esperado y la varianza de $\hat{\lambda}$.

c) Muestre que $\hat{\lambda}$ converge c.s. a λ cuando $n \to \infty$

P3. Un publicista se dedica a mandar spams, convencido de que mientras más envía, más vende el producto. Se estima que las ventas en un período son proporcionales al número de spams, de manera que si X es el número de ventas en dicho período, durante el cual se enviaron s spams, entonces se tiene la relación:

$$X = \alpha s + \varepsilon$$

donde $\varepsilon \in N(0, \sigma^2)$, con σ conocido.
Considere una MAS, $X_i = \alpha s_i + \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$. Suponga que los s_i son conocidos. Calcule $\hat{\alpha}$ el EMV de α. ¿Es insesgado?

P4. Un restaurante puede servir 80 comidas por noche, y sólo acepta clientes con reservación. La experiencia Muestra que 20 % de los clientes que reservan no vienen.

Asumiendo que los clientes reservan y comen de manera independiente ¿Cuál es la máxima cantidad de reservaciones que puede aceptar el restaurante para que la probabilidad de poder servir a todos los clientes que vendrán sea mayor o igual a 0,9772?

Hint: Si Z distribuye como una normal estándar, entonces $\mathbb{P}(Z > 2) = 0{,}0228$

Propuestos

Prop1 La lectura en un voltímetro conectado a un circuito de prueba está distribuida uniformemente en el intervalo $(\theta, \theta + 1)$, donde θ es el valor desconocido del voltaje real del circuito. Suponga que $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ denota una muestra aleatoria simple de esas lecturas.

a) Demuestre que $\hat{\theta} = \overline{Y}$ es un estimador sesgado de θ y calcule su sesgo.

b) Encuentre el error cuadrático medio de $\overline{Y}$ cuando se usa como estimador de θ.

c) Entregue un estimador insesgado de θ.

Prop2 Sea Y_1, ..., Y_n una m.a.s. de una densidad dada por:

$$f(y) = 3\beta^3 y^{-4} 1_{y \geq \beta}$$

donde $\beta > 0$ es desconocido. Considere el estimador $\hat{\beta} = \text{mín}(Y_1, ..., Y_n)$.

a) Encuentre el sesgo del estimador $\hat{\beta}$.

b) Encuentre su error cuadrático medio.