

MA3403-2. Probabilidades y Estadística

Profesor: Raúl Gouet

Auxiliares: Vicente Salinas

Fecha: 25 de junio de 2021



Auxiliar 11: Teoremas Límites y Desigualdades

Proposición 1 (Desigualdad de Markov). Si X es una v.a. positiva y $a > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Proposición 2 (Desigualdad de Chebyshev). Para todo $a > 0$ se cumple que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Teorema 1 (LGN débil). Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (iid). Sea $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ (como la sucesión es iid, todas las v.a.'s X_i tienen la misma esperanza). Sea

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Entonces para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

Teorema 2 (LGN fuerte). Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (iid). Sea $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ (como la sucesión es iid, todas las v.a.'s X_i tienen la misma esperanza). Sea

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$$

Teorema 3 (Teorema Central del Límite). Si $X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de variables aleatorias iid con media μ y varianza $\sigma^2 \neq 0$, y $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, entonces

$$Z_n = \frac{(S_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una normal estándar. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

donde Φ es la función de distribución de una $\mathcal{N}(0, 1)$.

P1. Se obtienen dos mediciones independientes de una cantidad μ . Estas mediciones se modelan como dos v.a. X e Y normales con la misma esperanza: $E[X] = E[Y] = \mu$, pero distinta varianza: $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$, $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$. Si se combinan ambas mediciones para obtener un promedio ponderado de la medición a través de la nueva v.a. $Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$, con $\alpha \in [0, 1]$:

- Muestre que $E[Z] = \mu$.
- Calcule $\text{Var}(Z)$. Encuentre el valor de α que minimiza la varianza del promedio ponderado, en función de σ_X^2 y σ_Y^2 .

P2. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

- De una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.
- Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?
- ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99%, el promedio de notas esté entre 70 y 80?

P3. Suponga que usted dispone de una mesa cuadrada de lado a , sobre la cual dibuja un círculo inscrito en ella. Luego, usted lanza n objetos al azar sobre la mesa (distribuidos uniformemente y de manera independiente) y denota c_n la cantidad de ellos que caen dentro del círculo. Muestre que la cantidad $\frac{4c_n}{n}$ converge a π cuando $n \rightarrow \infty$ con probabilidad 1.

P4. Los tiempos para procesar pedidos en el mostrador de servicio de una farmacia están distribuidos exponencialmente con media de 10 minutos. Si 100 clientes pasan al mostrador. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad de ellos necesite esperar más de 10 minutos?

Propuestos

Prop1 Se sabe que a partir del momento en que un organismo muere, los átomos de isótopo radiactivo $C14$ en sus tejidos se desintegran (transformándose en un átomo estable), independientemente entre sí, cada uno tras un tiempo aleatorio de ley exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Pruebe que transcurrido un tiempo $t > 0$ desde la muerte, la proporción de átomos de $C14$ que no se han desintegrado es aproximadamente $e^{-\lambda t}$

(Ind: Asuma que hay infinitos (numerable) átomos de $C14$, enumérellos y considere las v.a. $X_n =$ “tiempo de vida del átomo n ”).