MA3403-2. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 11 de junio de 2021

Auxiliar 9

P1. Sea (X, Y) un vector aleatoria con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}$$

a) Plantee las integrales para calcular $P(X > 2|Y < 4)$

b) Calcule $E(X|Y)$ ¿Son X e Y independientes?

P2. Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B, respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B. Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.

a) Encuentre $P(T_A < T_B)$.

b) Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?

c) Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia.

P3. Usted sale de su casa a las $8:00$, y debe llegar a la universidad a más tardar a las $8:30$. Si usted se siente con energía, viaja en bicicleta, y el tiempo de viaje (en minutos) es una variable uniforme en $[25, 35]$. Si no se siente con energía, usted espera el autobús, que tarda en llegar al paradero un tiempo distribuido uniformemente en el intervalo $[0, 20]$ (independiente del tiempo de viaje en bicicleta), y lo deja en la universidad luego de 25 minutos de viaje. Suponga que la probabilidad de sentirse con energía es $p = 0,75$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que usted llegue a la hora?

b) Si usted llegó atrasado, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?

P4. Sea Z una normal estándar, es decir, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ y sea $t > 0$. Demuestre o refute las siguientes igualdades:

a) $P(Z > t) = P(Z < -t)$

b) $P(|Z| > t) = P(|Z| < -t)$

c) $P(|Z| < t) = 2P(Z > t) - 1$

Definición 1 (Covarianza)**.** Dadas dos v.a.'s X, Y, al **covarianza** indica la relación entre ambas variables, y se define como

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)$$

Trabajando la expresión, se tiene que

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left(X \cdot Y\right) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y))$$

Con los cual, si X e Y son independientes, $Cov(X,Y) = 0$. (la inversa **no** es cierta)

Propiedades 1. *Dadas X, Y v.a.'s, se cumple que*

1. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2. $Cov(X,X) = Var(X)$
3. $Cov(aX,Y) = aCov(X,Y)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.
4. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$
5. *Covarianza es lineal en las sumas en cada componente, es decir, dadas $X_1, ..., X_n$ e $Y_1, ..., Y_m$ v.a.'s,*

$$Cov\left(\Sigma_{i=1}^n X_i, \Sigma_{j=1}^m Y_j\right) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m Cov(X_i, Y_j)$$

Definición 2 (Coeficiente correlación)**.** Dadas X, Y v.a.'s, se define el coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$ entre ambas variables como

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Propuestos

Prop1 Sea (X_i, Y_i), con $i = 1, ..., n$, con $n \in N$, una secuencia de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. Esto es que, "conjuntamente", (X_1, Y_1) es independientes, y tienen la misma distribución, que (X_2, Y_2) y así sucesivamente. De este modo, para un i y j arbitrarios, tales que $i \neq j$, se tiene que X_i y Y_i pueden ser dependientes mientras que Xi y Yj son independientes. Además se tiene que para todo i: $\mu_x = E(X_i)$, $\mu_y = E(Y_i)$, $\sigma_x^2 = Var(X_i)$, $\sigma_y^2 = Var(Y_i)$, $\rho = \rho(X_i, Y_i)$

Demuestre que $\rho\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) = \rho$