

MA3403-2. Probabilidades y Estadística**Profesor:** Raúl Gouet**Auxiliares:** Vicente Salinas**Fecha:** 4 de junio de 2021**Auxiliar 8: Vectores Aleatorios y Cambios de Variables**

P1. En una tienda de compra y venta de vehículos, se paga una cantidad X por auto y los venden a una cantidad Y , con X, Y v.a.'s que tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Encuentre las densidades marginales de X e Y
- Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$ y $\mathbb{E}(Y|X = x)$.
- ¿Cuál es el valor esperado de la compra y venta de vehículos?

P2. a) Sean X e Y v.a. independientes con distribución normal estándar. Determine la función densidad conjunta de $U = X$ y $V = \frac{X}{Y}$. Muestre que V tiene distribución de **Cauchy**, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1 + v^2)}$$

- La densidad conjunta de X e Y está dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcule la densidad condiciones de X dado que $Y = y$. Calcule $\mathbb{P}(X > 1|Y = y)$

P3. Usted se dirige a un cumpleaños sorpresa, son las 20 : 30 y se sienta a esperar la micro en el paradero. El tiempo que tarda el bus en pasar, desde que inicia el trayecto, es una variable aleatoria T exponencial de parámetro $\lambda = 1/10$. El trayecto demora 15 minutos al lugar del cumpleaños, y la cumpleañera llegará a las 21. El chofer del único bus, antes de iniciar el recorrido, se da cuenta que el parabrisas está tan sucio que le es imposible manejar así. El tiempo S que demora en limpiarlo es una v.a. uniforme en el intervalo $[5, 15]$. Calcule la probabilidad de que llegue antes que la cumpleañera.

Propuestos

Prop1 Sean $a, b, \lambda > 0$, $a < b$, $X \sim U(a, b)$ e $Y \sim \exp(\lambda)$ variables independientes. Se definen las variables aleatorias $U = X + Y$ y $V = \frac{X}{Y}$. Muestre que $f_{U,V}(u, v) = \frac{ue^{-\frac{\lambda u}{v+1}}}{(b-a)(v+1)^2} 1_{\{a+\frac{a}{v} < u \leq b+\frac{b}{v}\}} 1_{\{v>0\}}$