MA3403-2. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 28 de mayo de 2021

Auxiliar 7: Vectores Aleatorios

Definición 1 (Vectores Aleatorios)**.** Un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se cumple que la:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 2 (Funciones marginales)**.** Dado un vector aleatorio $X = (X_k)_{k=1}^n$ y $x = (x_k)_{k=1}^n \in R^n$ se define la función de distribución marginal:

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{(x_1,..,x_{k-1},x_{k+1},..,x_n)\to\infty} F_X(x) = P(X_k \leq x_k)$$

A F la llamamos función de Distribución de probabilidad de X

Definición 3. Sea X un vector aleatorio discreto. Se define la función de probabilidad de X, $pX : R^n \to [0,1]$, como:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

Por ejemplo caso $k = 3$: $X = (X_1, X_2, X_3)$ y $p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,x_3 \in R} P_X(x)$

Definición 4. Sea X un vector aleatorio continuo. Se define:

$$P(X \in B) \int_B f_X(x)dx$$

Obs: A esta función $f_X(x)$ se le conoce como densidad conjunta y note que esta integral suele ser una integral en más de una dimensión.
Por ejemplo: Sea $B = R_+^2$ (El primer cuadrante) y sea $f_X(x) = \frac{1_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}(x,y)}{\pi}$, se tiene que:

$$P(X \in B) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x)dxdy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} r d\theta dr = \frac{1}{4}$$

Las funciones de densidad marginal se definen de manera análoga, sea $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3$$

Propiedades 1. $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = f_X(x)$

Obs: Si las componentes de un vector aleatorio, son variables independientes:

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^n F_{X\,i}(x_i)$$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X\,i}(x_i)$$

$$\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_1 ... \partial x_n} = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_{X\,i}(x_i)}{\partial x_i} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_X(x)$$

P1. Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} 1_{\{x>0,y>0\}}$$

Calcule $P(X \geq Y \geq 2)$ y $P(2 - Y \geq X \geq Y)$

P2. Sea X e Y variables aleatorias tales que su densidad es $p(x,y) = \frac{e^{-2}}{x!(y-x)!}$ para todo $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \{x, x+1, x+2, ...\}$. Vale 0 en otro punto.

a) Encuentre las densidades marginales de X e Y

b) Sea $Z = Y - X$. ¿Es X independiente de Z?

P3. Sean X, Y v.a. independientes tal que X, Y $Geom(p)$. Sea $Z = X + Y$. Determine R_Z y encuentre $p_Z(k) = \mathbb{P}(Z = k)$.

P4. Sea X_1, X_2, X_3 y X_4 variables aleatorias independientes con la misma función de distribución acumulada F y densidad f. Se define $I = P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$
Calcule I y muestre que el resultado no depende de F **hint:** escriba todas las integrales necesarias y haga el cambio de variable $u_i = F(x_i)$ cuando lo estime conveniente

Propuestos

Prop1 La densidad conjunta de X e Y esta dada por $f(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}$ para $-y \leq x \leq y$ y $0 < y < \infty$. En cualquier otro caso la densidad es 0. Encuentre:
a) El valor de c
b) Las densidades marginales de X e Y . ¿Son independientes?
c) La esperanza de X

Indicación: Puede usar sin demostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ donde $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$