MA3403-5. Probabilidades y Estadística
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 14 de mayo de 2021

Auxiliar 6: Variables Aleatorias Continuas

Definición 1 (V.a. continua)**.** Una v.a. X es continua si existe una función no-negativa definida para todo número real, tal que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

A f la llamamos función de densidad de probabilidad de X

Propiedades 1.
1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2. *Dado* $B = [a,b] \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
3. *Dado* $a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$
4. *Función distribución acumulada, dado* $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Definición 2. Dada X una v.a. continua, se define su **esperanza**, o valor esperado, como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Propiedades 2. *Dada* X *una v.a. continua y* g *una función real, entonces la esperanza de la v.a.* $g(X)$ *esta dada por*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)fx$$

Definición 3. Dada X v.a., se define su **varianza** como

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

V.a. continuas

1. **Uniforme:** X $U(a,b)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. **Normal:** X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces
   - $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   - $\mathbb{E}[X] = \mu$
   - $Var(X) = \sigma^2$
   - Si X $\mathcal{N}(0,1)$, la llamamos v.a. normal estándar.
3. **Exponencial:** X $exp(\lambda)$, entonces
   - $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Definición 4. Dada una v.a. X y $k \in \mathbb{N}$, le llamamos Momento de orden k al valor esperado de X^k

$$\mu_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Definición 5. Dada una v.a. X y $t \in \mathbb{R}$, se define la función generadora de momentos de X como

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Al derivar $M(t)$ se pueden generar todos los momentos de la v.a. X.

P1. Un auxiliar de MA3403, les pide a sus alumnos dibujar un octavo de circunferencia, posteriormente que escojan algún ángulo θ que este comprendido por este. El punto Y está determinado por la proyección en el eje Y de la intersección entre la recta que pasa por el origen, con pendiente $\tan(\theta)$ y la recta $x = 1$, a partir de la experiencia el ángulo parece estar distribuido uniformemente entre 0 y $\dfrac{\pi}{4}$. Determine la función de densidad de Y, y calcule la esperanza.

Obs: para el caso en se dibuja un cuarto de circunferencia no existe esperanza

Hint: Pruebe que si X, Y son dos v.a. tal que $g(X) = Y$ con g función real invertible y creciente, entonces $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$.

P2. En Economía se duce que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a X es:
Averso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$
Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$
Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$
Si $X \sim Unif(0,1)$ indique el tipo de agente si:

a) $U(t) = t^2$

b) $U(t) = ln(t)$

c) $U(t) = a + bt$

P3. Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X, con fgm dada por $\varphi_X(t) = e^{3(e^t-1)}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

P4. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

Propuestos

Prop1 Suponga que tiene una variable aleatoria X uniforme en $[0, 2\pi]$. Calcule entonces la densidad de $|\sin(X)|$