**MA3403-5. Probabilidades y Estadística**
**Profesor:** Raúl Gouet
**Auxiliares:** Vicente Salinas
**Fecha:** 7 de mayo de 2021

# Auxiliar 5: Variables Aleatorias Continuas

**P1.** La adivina Solanda Yultana quiere demostrar su poder predictivo proponiendo el siguiente juego a las personas que tienen exactamente dos hijos (de cualquier sexo). Ella les hace la pregunta "Dime el nombre de una hija tuya". Si la persona responde "No tengo hijas" entonces no hay nada que adivinar y se acaba el juego sin un ganador. En cambio, si responde un nombre, Solanda intenta adivinar el sexo del otro hijo o hija. Si acierta, la persona le da \$1000 a Solanda y si no acierta, es Solanda quién entrega \$1000 a la persona. Si Solanda en realidad siempre dice "tu otro hijo es un hombre", ¿cuál es la ganancia esperada de la adivina en cada adivinanza? ¿Y su varianza? (Suponga que para todas las personas de dos hijos la probabilidad de que cada hijo sea de sexo masculino es 1/2 independiente del sexo del otro hijo).

**P2.** Se ha observado que el volumen por hora de agua radiactiva que expulsa una planta nuclear, expresado en $m^3$, se puede modelar como una v.a. continua con densidad de probabilidad continua dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq 1/2 \\ B(1-x) & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro x} \end{cases}$$

a) Determine la condición que deben satisfacer los parámetros $A, B > 0$ para que $f_X$ sea una función de densidad.

b) Obtenga la función de distribución $F_X$.

c) Use la función de distribución $F_X$ para calcular la probabilidad de que el agua expulsada (en $m^3$) sea $(i)$ más de 1/2; $(ii)$ menos de 1/2; $(iii)$ entre 1/4 y 3/4.

d) Calcule (usando la definición de probabilidad condicional) $\mathbb{P}[X < 0{,}2|x \leq 1/2]$ y $\mathbb{P}\left[X > \frac{1}{2}|\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right]$

e) Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

**P3.** Sea $Y$ una v.a. tal que $Y \sim U(0,5)$, ¿Cuál es la probabilidad de que las soluciones a la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean ambas reales?

**P4.** Decimos que una variable aleatoria $X$ tiene una distribución de Laplace de parámetros $\mu \in R$ y $b > 0$ si su densidad está dada por: $f_X(x) = Ce^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \qquad \forall x \in R$

a) Calcule el valor de $C$.

b) Supongamos $\mu = 0$, ¿Qué variable conocida es $|X|$?

c) Calcule $E(X)$.

d) **(Propuesto)** Calcule $Var(X)$.

# Propuestos

**Prop1** Sea $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. con $X$ $Geom(p)$.

a) Pruebe que $X$ $Geom(p)$ (i.e. $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$) ssi $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Para las siguientes partes, sean $0 < p, q < 1$ y $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{N}$ v.a.'s independientes con $X$ $Geom(p)$,$Y$ $Geom(q)$.

b) Encuentre $\mathbb{P}(Y = X + 1)$

c) Sea $Z = \text{mín}\, X, Y$. Demuestre que $Z$ $Geom(s)$ para algún $s$, ¿cual es el $s$?