P1. Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1-p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

a) Indique la función p_X de la variable X correspondiente al número de cultivos que proliferan.

b) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que prolifero inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1-q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cual es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?

- $P(\text{cultivo 1 prolifere}) = p$

$P(\text{cultivo } i\text{-simo prolifere}) = p \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

$P(\text{cultivo 1 y el 8 proliferen}) = P(\text{prolifere 1}) \cdot P(\text{prolifere 8})$

a) $P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

El nº de cultivos que proliferan

$\binom{N}{k} \rightarrow$ Escoger los K de los N que proliferaron

Forma 2

Bueno como son N cultivos independientes y cada uno prolifera con prob $= p$

$\Rightarrow \text{Bin}(N, p) \Rightarrow P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

b) $P(Y=j)$

Idea

$P(Y=j \mid X=k)$, con $k \geq j$

$P(Y=j \mid X=k) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}$

$$P(X=k) = \binom{N}{k} p^{k} (1-p)^{K}$$

$$P(Y=j \mid X=k) \quad \text{con} \quad k < j$$

$$P(Y=j \mid X=k) = 0 \quad \text{si } k<j$$

$$P(Y=j)^{\text{Totales}} = \sum_{k=0}^{N} P(Y=j \mid X=k) P(X=k)$$

$$= \sum_{k=j}^{N} P(Y=j \mid X=k) P(X=k)$$

$$= \sum_{k=j}^{N} \binom{k}{j} x^{j} (1-x)^{k-j} \binom{N}{k} p^{k} (1-p)^{N-k}$$

$$= \frac{x^{j} N!}{j!} \sum_{k=j}^{N} \frac{(1-x)^{k-j} p^{k}}{(k-j)!\,(N-k)!} (1-p)^{N-k}$$

$$= \frac{(N-j)!}{(N-j)!} \frac{x^{j}}{j!} N! \cdot \sum_{k=0}^{N-j} \frac{(1-x)^{k} p^{k+j} (1-p)^{N-k-j}}{k!\,(N-k-j)!}$$

$$= x^{j} \binom{N}{j} p^{j} \sum_{k=0}^{N-j} \binom{N-j}{k} \left[(1-x)p\right]^{k} (1-p)^{N-j-k}$$

$$= \binom{N}{j} (px)^{j} (1-px)^{N-j} \sim \text{Bin}(N, px)$$

$$= \binom{N}{j} (p_x)^j (1-p_x)^{N-j} \sim Bin(N, p_x)$$

Forma 2

Para que sobreviva hasta el final tienen que sobrevivir a los 2 procesos $\Rightarrow$ $p(\text{Sobrevevir}) = p_x$

Como son N cultivos independientes con prob p_x de sobrevivir

$$\Rightarrow Bin(N, p_x)$$

cultivos que quedan vivos?

P2. Durante la cuarentena, para despejarse un poco, a cierta hora del día usted se queda mirando por la ventana. Tras varios días se da cuenta que por el techo de la casa vecina transitan muchos gatos. Como usted es bastante supersticioso, no le gusta observar gatos negros pasar porque le dan mala suerte.

a) Después de un tiempo mirando, calcula que existe una probabilidad p de que aparezca uno. Cierto día, se para tras la ventana y se pregunta, ¿Cuál será la probabilidad de que los primeros 5 gatos que vea no sean negros?

b) Un día, le pierde el miedo a los gatos negros. Pero su superstición es tan fuerte que debe evitar a toda costa ver 3 gatos negros diarios, si no tendrá demasiados años de mala suerte. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 20 gatos antes de que vea 3 gatos negros?

c) Si usted ve n gatos al día, calcule el número esperado de gatos negros vistos al día, en función de n y p.

a) $P(\text{Gato Negro}) = p$

$P(\text{Gato no negro}) = (1-p)$

$P(X_1=0, X_2=0, X_3=0, X_4=0, X_5=0)$

$= \underbrace{1\cdot(1-p)^5}$ → No hay nada que escoger pues son todos

Ejemplo: Prob de ver solo 1 de los 5 gatos sea negro

$\binom{5}{1}p(1-p)^4$

$P(X_1=1, X_2=0, \ldots, X_5=0) + P(X_1=0, X_2=1, \ldots)$

$\ldots = \binom{5}{1}p(1-p)^5$

b) $P(\text{De los 20 gatos a lo mas 2 sean Negros})$

$P(\text{De los 20 ó sean 0 negros} \cup \text{'' sean 1 negro} \cup \text{'' sean 2N})$

$= P(\text{De 20 sean 0N}) + P(\text{'' sean 1N}) + P(\text{'' sean 2N})$

$= \binom{20}{0}(1-p)^{20}p^0 + \binom{20}{1}(1-p)^{20-1}p^1 + \binom{20}{2}(1-p)^{20-2}p^2$

$$= \binom{20}{0}(1-p)^{20}p^0 + \binom{20}{1}(1-p)^{20-1}p^1 + \binom{20}{2}(1-p)^{20-2}p^2$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i}(1-p)^{20-i}p^i$$

c) $E(X) = \sum_{k\in R_X} k\, P(X=k)$

X: Cuantos de los N gatos son negros

$R_X = \{0, \dots, N\}$

$$P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$= \boxed{Np}$$

$\boxed{\text{Si}}$

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{N}{2}$ es el número esperado de gatos

P3. Un grupo de m personas simultáneamente entra a un ascensor en el piso más bajo (nivel 0) Cada persona aleatoriamente escoge uno de los r pisos $1, 2, 3, ..., r$ para bajarse, donde cada elección de las personas son independientes unas de otras. El elevador solo para en un piso si al menos una persona quiere bajarse ahí. Si ninguna otra persona entra al ascensor en los pisos $1, ..., r$. ¿Cual es el valor esperado de cantidad de paradas que hará el ascensor?

$$P(\text{persona } i \text{ escoge el piso } j) = \frac{1}{r}$$

$$E(aX+b) \overset{\text{Lineal}}{=} aE(X) + E(b) \quad \boxed{\text{Verdad } E(b)=b}$$

$$= aE(X) + b$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$X_j : \begin{cases} 1 & \text{Si para en el piso } j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$P(X_j = 0) = P(\text{Nadie marque el piso } j)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \text{La persona } i \text{ no marque el piso } j\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} P(\text{La persona } i \text{ no marque el piso } j)$$

$$= \prod^{m} \frac{(r-1)}{r} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m}$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{r-1}{r}\right) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m}$$

$$P(X_j = 1) = 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m}$$

$$E(X_j) = 0 \cdot P(X_j = 0) + 1 \cdot P(X_j = 1)$$

$$= 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m}$$

$Y = \sum_{j=1}^{r} X_j$: En cuantos pisos para

$$P(Y=0) = P\left(\sum_{j=1}^{r} X_j = 0\right) = P(\text{No para en ninguno})$$

$$P(Y=r) = P\left(\sum_{j=1}^{r} X_j = r\right) = P(\text{Parar en todos})$$

$$P(Y=K) = P\left(\sum_{j=1}^{r} X_j = K\right) = P(\text{Parar en } K \text{ pisos})$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{j=1}^{r} X_j\right) = \sum_{j=1}^{r} E(X_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m}\right)$$

$$\boxed{E(Y) = r\left(1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)^{m}\right)}$$

Caso $r=2$ y $n=1$

$$E(Y) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^1\right) = 1$$

Caso $r=2$ y $n=2$

$$E(Y) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

P4. Dada una variable aleatoria no negativa X, decimos que tiene la propiedad de perdida de memoria si se cumple que

$$\forall s, t > 0, \mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

Demuestre que las variable aleatoria geométrica tiene la propiedad de pérdida de memoria.

$$P(X > K) = P(X \geq K+1)$$

$$= 1 - P(X \leq K)$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{K} P(X = j)$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{K} (1-p)^{j-1} p$$

$$= 1 - p \sum_{j=0}^{K-1} (1-p)^{j}$$

$$= 1 - p \left[\frac{(1-p)^K - 1}{(1-p) - 1} \right]$$

$$= 1 + (1-p)^K - 1$$

$$P(X > K) = (1-p)^K$$

$$P(X > t+s \mid X > t) \overset{def}{=} \frac{P(X > t+s \cap X > t)}{P(X > t)}$$

$$P(X>t)$$

$$\stackrel{\bullet}{=} \frac{P(X>t+s)}{(1-p)^t}$$

$$= \frac{(1-p)^{t+s}}{(1-p)^t} = (1-p)^s$$

$$\stackrel{\bullet}{=} P(X>s)$$

Prop1 Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} Y & 1 \\ 2 & Y-1 \end{pmatrix}$$

Calcule la probabilidad de que la matriz sea invertible si $Y \sim geom(p)$

$$P(M \text{ invertible}) = P(\det(M) \neq 0)$$

$$= P(Y(Y-1) - 2 \neq 0)$$

$$= P(Y^2 - Y - 2 \neq 0)$$

$$= P(Y \notin \{-1, 2\})$$

$$= 1 - P(Y \in \{-1, 2\})$$

$$= 1 - (P(Y=-1) + P(Y=2))$$

$$= 1 - (0 + (1-p)^{2-1} \cdot p)$$

$$= 1 - (1-p)p$$

$$= \boxed{1 - p + p^2}$$