

P3. Sea (Ω, \mathbb{P}) espacio de probabilidad:

a) Sean A y B sucesos en este espacio tales que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$. Pruebe que: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

b) Decimos que la colección de eventos $(A_i)_{i=1}^N \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una partición de Ω si: $\bigcup_{i=1}^N A_i = \Omega$ y $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Para una partición, pruebe que debe existir un $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $P(A_i) \leq \frac{1}{N}$

c) Propuesto: Pruebe que debe existir un $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $P(A_i) \geq \frac{1}{N}$

1er idea

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P \text{ es monótona} \\ X \subseteq Z \\ P(X) \leq P(Z) \end{array}}$$

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \quad \text{Siempre cierto}$$

$$\xRightarrow{\text{Monotonía}} P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \xRightarrow{\text{Sandwich}} P(A \cap B) = P(A) = P(A \cup B)$$

$$\text{Análogamente} \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) = P(B) = P(A \cup B)}$$

b)

Recordamos que la probabilidad de la unión de cositas disjuntas es solo la suma.

Por contradicción Suponemos $\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad P(A_i) > \frac{1}{N}$

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \stackrel{\text{Suma de disj.}}{=} \sum_{i=1}^N P(A_i) > \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

$$\Rightarrow 1 > 1 \quad \text{---} \times \text{---}$$