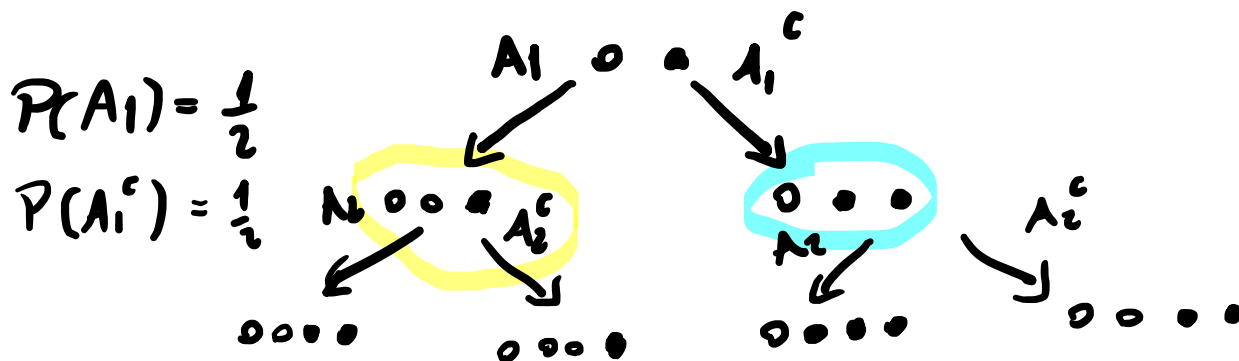


Prop2 Una urna contiene inicialmente dos bolitas, una blanca y una negra. Se extrae una bolita, se observa su color y se devuelve junto a otra del mismo color. Luego, se extrae otra bolita, se observa su color y se devuelve junto a otra del color contrario. Se definen $B_k = \{ \text{Al final la urna contiene } k \text{ bolitas blancas} \}$ y $A_i = \{ \text{La } i\text{-ésima extracción fue una bola blanca} \}$

a) $P(B_k)$ para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

b) $P(A_2)$

c) $P(B_k | A_i) \forall i \in \{1, 2\} \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$



$$P(A_1) = \frac{1}{2} \quad P(A_1^c) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{2}{3} \quad P(A_2^c | A_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2 | A_1^c) = \frac{1}{3} \quad P(A_2^c | A_1^c) = \frac{2}{3}$$

$$P(B_1) = P(A_1^c \cap A_2) = P(A_2 | A_1^c) P(A_1^c)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c)$$

$$= P(A_2 | A_1) P(A_1) + P(A_2^c | A_1^c) P(A_1^c)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$P(B_3) = P(A_2^c \cap A_1) = P(A_2^c | A_1) P(A_1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(B_k) = 0$$

b x z 4

$$b) P(A_2) \stackrel{\text{Total}}{=} P(A_2 | A_1) P(A_1) + P(A_2 | A_1^c) P(A_1^c) \\ = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$c) P(B_1 | A_1) = 0$$

$$P(B_2 | A_1) = P(A_2 \cap A_1 | A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \\ = P(A_2 | A_1) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$P(B_3 | A_1) = P(A_2^c \cap A_1 | A_1) = \frac{P(A_2^c \cap A_1)}{P(A_1)} \\ = P(A_2^c | A_1) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(B_4 | A_1) = 0$$

$$P(B_1 | A_2) = P(A_1^c \cap A_2 | A_2) = \frac{P(A_1^c \cap A_2)}{P(A_2)} \\ = P(A_1^c | A_2) \\ \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A_2 | A_1^c) P(A_1^c)}{P(A_2)} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(B_2 | A_2) = P(A_1 \cap A_2 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \\ = P(A_1 | A_2) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(A_2 | A_1) P(A_1)}{P(A_2)} \\ = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$P(\beta_3 | A_2) = P(\beta_4 | A_2) = 0$$