P1. Hay dos fábricas de radios. Cada radio producida en la fábrica A sale defectuosa con probabilidad 0,05, mientras que una producida en la fábrica B sale defectuosa con probabilidad 0,01 (independiente de las otras radios producidas). Usted compra dos radios que provienen de la misma fábrica, la cual puede ser A o B con la misma probabilidad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera radio que usted revisa salga defectuosa?

b) Si la primera radio revisada salió defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo esté?

$$P(D_i|A) = 0.05$$

$$P(D_2 \cap D_1|A) = P(D_2|A)P(D_1|A) = 0.05^2$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} D_i|A\right) = \prod_{i=1}^{n} P(D_i|A) = 0.05^n$$

$$P(D_i|B) = 0.01$$

$$P(D_1 \cap D_2|B) = P(D_1|B)P(D_2|B) = 0.01^2$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

a) $$P(D_1) \overset{\text{Totales}}{=} P(D_1|A)P(A) + P(D_1|B)P(B)$$

$$= 0.05 \cdot \frac{1}{2} + 0.01 \cdot \frac{1}{2} = 0.03$$

b) $$P(D_2|D_1) \overset{\text{Def}}{=} \frac{\overset{\circledast}{P(D_2 \cap D_1)}}{\underset{\checkmark}{P(D_1)}}$$

$\circledast$ $$P(D_2 \cap D_1) \overset{\text{Totales}}{=} P(D_2 \cap D_1|A)P(A) + P(D_2 \cap D_1|B)P(B)$$

$$= 0.05^2 \cdot \frac{1}{2} + 0.01^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{26}{100^2} \cdot \frac{1}{2}$$

---

26 1

$$P(D_2|D_1) = \frac{\frac{26}{100^2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{6}{100} \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{13}{300}}$$

Si $D_2 \perp\!\!\!\perp D_1$

$$P(D_2|D_1) = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1)} = P(D_2) = \frac{9}{300} \neq \frac{13}{300}$$

Por lo que no son independientes

P2. Se somete a una pregunta de verdadero o falso a tres amigos . Si aciertan, pasan inmediatamente el curso de Probabilidades y Estadística, y si no, deben seguir dando el ramo . Dada la pregunta, los amigos a_1 y a_2 aciertan, independientemente, con probabilidad $p \in (0,1)$. Luego, y en base a lo respondido por los amigos a_1 y a_2, el amigo a_3 entrega la respuesta final del grupo. Si el amigo a_3 quiere ganar, decida si las siguientes estrategias son igual de buenas, o hay alguna mejor que otra.

a) Elige al azar a uno de sus amigos a_1 o a_2, y responde lo mismo que el amigo que escogió.

b) Considerar la respuesta de ambos de la siguiente forma: Si sus respuestas coinciden, quedarse con esa respuesta, pero si no, tirar una moneda equilibrada e independiente de las respuestas de sus amigos y según el resultado de la moneda elegir la respuesta de: El amigo a_1 si sale sello, y la del amigo a_2 si no.

a_1	a_2	Prob
C	C	p^2
C	I	$p(1-p)$
I	C	$p(1-p)$
I	I	$(1-p)^2$

a) $P(G_1) = ?$

$P(a_1) = p \qquad p(a_1 \cap a_2) = p^2$

$P(a_2) = p \qquad P(a_1^c \cap a_2^c) = (1-p)^2$

$p(a_1 \cap a_2^c) = P(a_1^c \cap a_2) = p(1-p)$

$$P(G_1) \overset{\text{Totales}}{=} P(G_1 / \text{Escoger } a_1) P(\text{Escoger } a_1) + P(G_2 / \text{Escoger } a_2) P(\text{Escoger } a_2)$$

$$= P(a_1) \cdot \frac{1}{2} + P(a_2) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = \boxed{p}$$

b) $P(G_2) = ?$

$$P(\text{Coinciden}) = p^2 + (1-p)^2 = P((a_1 \cap a_2) \cup (a_1^c \cap a_2^c))$$

$$P(\text{Coinciden}^c) = 2p(1-p) = P((a_1 \cap a_2^c) \cup (a_1^c \cap a_2))$$

$$\overset{\text{Totales}}{=} P(G_2 / \text{Coinciden}) P(\text{Coinciden}) + P(G_2 / \text{Coinciden}^c) P(\text{Coinciden}^c)$$

$$= P(G_2 \cap \text{Coinciden}) + P(G_2 / \text{Coinciden}^c)\, 2p(1-p)$$

$$= \underbrace{P(a_1 \cap a_2)}_{p^2} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} p(1-p)$$

$$= p^2 + p - p^2 = \boxed{p}$$

P3. Se lanza consecutivamente un dado hasta que aparece un 1. Calcule la probabilidad de que sean necesarios más de 3 lanzamientos para obtener un 1.

$p = \frac{1}{6}$ Sacar el $\underline{1}$

$1-p = \frac{5}{6}$

$P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(X=2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(X=3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$ .... $P(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$

$$P(X>3) \overset{\text{discreto}}{=} P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} P(X=k) = A$$

$$P(E) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \frac{1}{6} = \boxed{1}$$

$$A = 1 - P(X=3) - P(X=2) - P(X=1)$$

$$= 1 - (1-p)^2 p - (1-p)p - p$$

$$= 1 - p + 2p^2 - p^3 - p + p^2 - p$$

$$= 1 - 3p + 3p^2 - p^3 = \boxed{(1-p)^3}$$

$$\boxed{P(X \geq K) = (1-p)^{K-1}}$$

P4. En una encuesta se desea preguntar por un tema delicado (como por ejemplo el aborto), y las personas no están dispuestas a contestar abiertamente. Se utiliza el siguiente procedimiento encubierto: al encuestado se le presentan dos preguntas:

A) ¿Esta de acuerdo con el aborto?

B) ¿Esta en desacuerdo con el aborto?

y se le pide extraer de una urna que contiene dos preguntas A y una pregunta B (al azar e independiente de su postura), y que conteste aquella que extrajo. Por ultimo, el encuestado responde SI o NO. Sea $p = \mathbb{P}(\text{estar de acuerdo con el aborto})$.

a) Si una persona respondió SI, calcule la probabilidad de que este a favor del aborto, en función de p.
hint: recuerde que puede condicionar por más de un evento simultáneamente mientras cumpla las condiciones.

b) Si a usted le entregan como resultado la proporción (probabilidad) de personas que respondió SI, digamos q, calcule la proporción (probabilidad) de personas que este a favor del aborto.

$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad P(D) = p$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(D \cap A) = P(D)P(A)$$

$$P(D \cap B) = P(D)P(B)$$

Es Necesario $Y \perp Z \cdot Y \perp Z^c$

(*) $$P(X|Y) \overset{\text{Totales}}{=} P(X|Y \cap Z)P(Z) + P(X|Y \cap Z^c)P(Z^c)$$

Dem

$$\frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \overset{\text{Totales}}{=} \frac{P(X \cap Y | Z)}{P(Y)} \cdot P(Z) + \frac{P(X \cap Y | Z^c)}{P(Y)} \cdot P(Z^c)$$

$$= \frac{P(X \cap Y \cap Z)}{P(Y)P(Z)} \cdot P(Z) + \frac{P(X \cap Y \cap Z^c)}{P(Y)P(Z^c)} P(Z^c)$$

$$= P(X | Y \cap Z) \cdot P(Z) + P(X | Y \cap Z^c) P(Z^c)$$

a) $$P(D|Si) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(Si|D)P(D)}{P(Si)}$$

$$P(Si|D) \overset{*}{=} \underbrace{P(Si|D \cap A)}_{1} \underbrace{P(A)}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{P(Si|D \cap B)}_{0} \cdot \underbrace{P(B)}_{1}$$

$$\underbrace{\qquad}_{1} \quad \underbrace{\quad}_{\frac{2}{3}} \quad + \underbrace{P(S_i \mid D \cap B)}_{0} \cdot \underbrace{P(B)}_{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$P(S_i \mid D^c) = \underbrace{P(S_i \mid D^c \cap A)}_{0}\,\underbrace{P(A)}_{\frac{2}{3}} + \underbrace{P(S_i \mid D^c \cap B)}_{1}\,\underbrace{P(B)}_{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$P(S_i) \overset{\text{Totals}}{=} \underbrace{P(S_i \mid D)}_{\frac{2}{3}}\,\underbrace{P(D)}_{p} + \underbrace{P(S_i \mid D^c)}_{\frac{1}{3}}\,\underbrace{P(D^c)}_{(1-p)}$$

$$\frac{2}{3}\, p + \frac{1}{3}\,(1-p)$$

$$= \frac{p+1}{3}$$

$$P(D \mid S_i) = \frac{\frac{2}{3}p}{\frac{p+1}{3}} = \boxed{\frac{2p}{p+1}}$$

b) $P(S_i) = q$

$$\left.\begin{aligned} P(S_i) &= q \\ P(S_i) &= \frac{p+1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{3q-1 = p}$$

Prop1 En una facultad, el 40 % de los alumnos se especializa en A, el 25 % se especializa en B, y un 5 % se especializa en ambos. Si se escoge al azar un alumno de la facultad, calcule la probabilidad de que:

a) No se especialice en A ni en B.

b) Se especialice sólo en B.

c) Se especialice en B suponiendo que se especializa en A ó B.

$P(A) = 0.4$

$P(B) = 0.25$

$P(A \cap B) = 0.05$

a) $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cup B^c)$

$= 0.6 + 0.75 - 0.95 = \boxed{0.4}$

b) $P(A^c \cap B) = P(A^c) - P(A^c \cap B^c) = 0.6 - 0.4 = \boxed{0.2}$

$P(A^c) = P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c)$

c) $P(B \mid A \cup B) = \dfrac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(B)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.25}{0.6} = \boxed{\dfrac{5}{12}}$

Prop2 La probabilidad de que una ampolleta en buen estado efectivamente encienda cuando se intenta prender es $0 < p < 1$, independiente de los otros intentos, mientras que un ampolleta en mal estado nunca enciende. De una caja con n ampolletas buenas y m malas usted extrae una al azar.

a) Si en el primer intento el ~~fósforo~~ ampolleta no prende, determine la probabilidad de que éste malo.

b) Suponiendo que no enciende en el primer intento, determine la probabilidad que encienda en el siguiente intento.

$$P(E|B) = p$$

$$P(E_i|B) = p \quad y \quad P(E_1 \cap E_2|B) = p^2$$

$$P(E|M) = 0 \qquad P(E_1 \cap E_2|M) = 0$$

$$P(B) = \frac{N}{N+M} \quad y \quad P(M) = \frac{M}{N+M}$$

a) $$P(M|E^c) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(E^c|M)\,P(M)}{P(E^c)}$$

$$P(E^c) \overset{\text{Totales}}{=} P(E^c|B)P(B) + P(E^c|M)P(M)$$

$$= (1-p)\frac{N}{N+M} + \frac{1 \cdot M}{N+M}$$

$$\Rightarrow P(M|E^c) = \frac{M}{(1-p)N+M}$$

b) $$P(E_2|E_1^c) = \frac{P(E_2 \cap E_1^c)}{P(E_1^c)} \overset{\text{T. Total}}{=} \frac{P(E_2 \cap E_1^c|B)\cdot P(B) + \cancel{P(\_|M)}P(M)}{\frac{(1-p)N+M}{N+M}}$$

$$\boxed{P(E_2|E_1^c) = \frac{p(1-p)\cdot N}{(1-p)N+M}}$$