Control 1. Probabilidades

4 de Mayo de 2021

Profesor: Joaquín Fontbona. Auxiliares: B.Hernández, T. Radic. Ayudante: P. Zúñiga
Tiempo: 3:00 hrs

1. En las partes a) y b), X e Y son v.a. de Poisson independientes, de parámetros α y β respectivamente.

   a) Muestre que para todo natural $m \geq 1$, $\mathbb{E}(X^m) = \alpha\mathbb{E}((X+1)^{m-1})$.

   b) Usando el hecho (que no se pide probar) que $Z = X + Y$ es una v.a. de Poisson de parámetro $\gamma = \alpha + \beta$, pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \ldots, n\}$,

   $$\mathbb{P}(X = k | Z = n) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-k}.$$

   Identifique la ley condicional de X dado $\{Z = n\}$.

   c) Una fábrica vende galletas en cajas de 100 unidades. La probabilidad de que se rompa una galleta, independientemente de todas las demás, es de $0,03$. Estime la probabilidad de que una caja contenga a lo más 4 galletas rotas, y calcule el número esperado de galletas rotas que hay en cada una.

2. Decimos que una v.a. continua Y tiene ley Gamma de parámetros $\theta, \lambda > 0$, si tiene densidad

   $$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) \frac{\lambda^\theta y^{\theta-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\theta)}$$

   donde $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty x^{\theta-1} e^{-x} dx$ es la denominada función Gamma (el valor no es explícito para todo θ). Escribimos entonces $Y \sim \text{Gamma}(\theta, \lambda)$.

   a) Verifique que f_Y es densidad de probabilidad y muestre que si $Y \sim Gamma(\theta, \lambda)$ entonces para todo $a > 0$ se tiene $aY \sim$Gamma$(\theta, \lambda/a)$.

   b) Sea ahora $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y := X^2$. Calcule $\mathbb{P}(Y \leq y)$ para cada $y \geq 0$, y deduzca que Y tiene ley Gamma, explicitando sus parámetros. (Ind: note la igualdad de eventos $\{Y \leq y\} = \{0 \leq X \leq \sqrt{y}\} \cup \{0 \geq X \geq -\sqrt{y}\}$.) Deduzca también que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3 a) Se tiene una caja con m bolas verdes y 1 bola roja. Se lanza un dado equilibrado. Si sale par, se sacan dos bolas de la caja simultáneamente. Si sale impar, se saca solo una. Calcule la probabilidad que en el dado haya salido un 4 sabiendo que la bola roja fue extraída.

   b) Se tiene una moneda en la que sale cara con probabilidad $p \in (0, 1)$. Se lanza la moneda independientemente hasta obtener cara por segunda vez, lo cual ocurre al $n-$ésimo lanzamiento. Muestre que, dado lo anterior, la probabilidad de que la primera cara haya ocurrido en el lanzamiento $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ es $1/(n-1)$.