Probabilidades: Auxiliar 6

Variables aleatorias discretas

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Bruno Hernández, Tristán Radic
30 de abril de 2021

P1. (EJERCICIO) Sea X una variable normal de media μ y varianza σ^2. Es decir, la función de densidad de X es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sea $Z = exp(X)$. Para $x > 0$ explique por qué los eventos $\{Z \leq x\}$ y $\{X \leq log(x)\}$ son iguales. Use lo anterior para encontrar la función de densidad de Z.
Esta distribución es conocida como distribución *log-normal*.

P2. Suma geométrica de geométricas. Sean $G \sim Geom(\bar{p})$ y una suceción $G_1, G_2, \cdots \sim Geom(p)$, todas independientes entre sí (donde $\bar{p}, p \in (0,1)$). El objetivo de este problema es utilizar funciones generadoras para probar que $Y := \sum_{i=1}^{G} G_i \sim Geom(p\bar{p})$

a) Sea $g \sim Geom(q)$ cualquiera. Pruebe que $\forall\, s \in [0,1]$, se tiene $\mathbb{E}(s^g) = \frac{sq}{1-(1-q)s}$.

b) Pruebe que para todo $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ con $n \geq k$ se tiene

$$\mathbb{P}(Y = n | G = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} G_i = n\right)$$

y deduzca que

$$\mathbb{E}(s^Y | G = k) = \mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^{k} G_i}) = \left(\frac{sp}{1-(1-p)s}\right)^k$$

c) Deduzca que $\mathbb{E}(s^Y) = \frac{sp\bar{p}}{1-(1-p\bar{p})s}$ y concluya el resultado.

P3. (Distribución de pareto) Dados $a > 0$ y $\alpha > 0$, decimos que una v.a. tiene distribución de Pareto de parámetros (a, α), y lo denotamos por $X \sim Par(a, \alpha)$, si tiene la densidad

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[a,\infty)} \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1}.$$

(a) Verifique que f_X es una densidad de probabilidad, calcule $\mathbb{P}(X > x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y explicite la función de distribución de X.

(b) Sea $b > a$ e Y con función de distribución $F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq y | X > b)$. Muestre que Y tiene una densidad, explicítela e identifíquela.

e) Para cada $y > 0$ fijo, calcule $\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X > x + y | X > x)$. Interprete el resultado y comente concisamente cómo influye el parámetro α. Compare con el caso de una v.a. exponencial.

f) Sean $a > 0$ y Y, Z dos v.a. reales tales que $\mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(Z > 0) = 1$ y $Z = \ln\left(\frac{Y}{a}\right)$. Pruebe que $Y \sim Par(a, \alpha)$ ssi $Z \sim Exp(\alpha)$.