Probabilidades: Auxiliar 5

Variables aleatorias discretas

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Bruno Hernández, Tristán Radic
23 de abril de 2021

P1. Ejercicio Sean $\alpha, c > 0$ constantes fijas. Para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, sea $p_n = cn^{-\alpha}$. Para qué valores de α, $(p_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ puede definir una función de probabilidad discreta? Exprese el valor que debe tener c para que ese sea el caso. Sea ahora X una v.a. con función de probabilidad discreta $(p_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$. Para qué valores de α la v.a. X es: integrable? De varianza finita? En estos casos, dé una expresión para la esperanza y la varianza de X

P2. Variables Poisson

(a) Sean X e Y dos v.a. de Poisson independientes, de parámetros β y γ respectivamente. Pruebe que $X+Y$ es una v.a. de Poisson de parámetro $\lambda = \beta + \gamma$.

(b) Variable de Poisson filtrada Suponga que el número Z de clientes que llegan a hacer un trámite al banco en cierto rango horario es un una v.a. de Poisson de parámetro λ. Suponga que con probabilidad p, cada cliente viene a cobrar un cheque, independientemente de todo lo demás.

Sea X el numero de clientes que viene a cobrar un cheque.

i) Demuestre que si $n \leq k$, se tiene que:

$$\mathbb{P}(X = k|Z = n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

ii) Concluya que $X \sim Poi(\lambda p)$

iii) Se define Y la cantidad de clientes que van al banco, pero no para cobrar un cheque. Deduzca de lo anterior que $Y \sim Poi(\lambda(1-p))$ y demuestre que X es independiente de Y.

P3. Se lanza de manera independiente una moneda hasta que se obtiene cara por vez $r-$ésima, y se denota por X el número de lanzamientos requeridos para que esto ocurra (se define $X = \infty$ en el evento en que nunca se llega a obtener las r caras). Suponga que en cada lanzamiento se obtiene cara con probabilidad $p \in (0,1)$. En este caso, X se denomina v.a. binomial negativa de parámetros (r, p).

(a) Muestre que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r (1-p)^{n-r}, \text{ si } n \geq r$$

y 0 si no.

(b) Muestre que X tiene la misma ley que $Y_1 + \cdots + Y_r$ donde $Y_1, \ldots, Y_r$ son variables aleatorias geométricas independientes de parámetro p. Usando ese hecho si lo desea, verifique que

$$\sum_{n=r}^{\infty} \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p^r (1-p)^{n-r} = 1.$$

y calcule $\mathbb{E}(X)$.

Para ello puede serle útil el siguiente esquema:

- Muestre que $\mathbb{P}(X > k) \leq r\mathbb{P}(Y_1 > k/r)$
- Deduzca que $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$
- Concluya

(c) Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ se tiene $\mathbb{E}(X^k) = \frac{r}{p}\mathbb{E}((X'-1)^{k-1})$, donde X' es v.a. binomial negativa de parámetros $(r+1, p)$. Deduzca que $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$, y relacionela con el valor de la varianza de una v.a. geométrica de parámetro p.