

Probabilidades: Auxiliar 4

Distribucion de Bernoulli y Binomial

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Bruno Hernández, Tristán Radic

16 de abril de 2021

P1. [Ejercicio] Sean Z, Y dos variables aleatorias independientes de leyes binomiales de parámetros (n, p) y (m, p) respectivamente.

(a) Sea $W := Z + Y$. Calculando $\mathbb{P}(W = l)$ para $l \in \mathbb{N}$, pruebe que W es una variable Binomial y especifique sus parámetros. Explique el resultado en términos de sumas de variables aleatorias Bernoulli independientes.

(b) Calcule $\mathbb{P}(Y = k | W = l)$ para cada $k \leq m$ y $k \leq l \leq n + m$.

P2. Sean $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ variables aleatorias independientes Bernoulli de parámetro $p \in (0, 1)$.

(a) Sea X la variable aleatoria definida por

$$X = \inf\{n \geq 1 : Y_n = 1\}$$

Calcule la función de probabilidad discreta $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$ y verifique que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Dé una interpretación de X en términos de una sucesión de experimentos independientes.

La ley de esta variable aleatoria se denomina *ley Geométrica de parámetro p* .

(b) Pruebe que una variable aleatoria discreta X tiene ley Geométrica de parámetro p ssi para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$. Calcule y grafique de forma aproximada su función de distribución.

Deduzca que una v.a. discreta a valores en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ tiene ley geométrica ssi tiene la propiedad de “no tener memoria”, es decir, para todo natural $m, n \geq 1$ se cumple que

$$\mathbb{P}(X > m + n | X > n) = \mathbb{P}(X > m).$$

Dé una interpretación de esta caracterización que explique el nombre de la propiedad.

(c) Sean X_1 y X_2 dos v.a. independientes con leyes Geométricas de parámetros $p_1, p_2 \in (0, 1)$ respectivamente. Encuentre (dando el nombre de) la ley de $X = \min\{X_1, X_2\}$. (Ind. calcule $\mathbb{P}(X > k)$).

- P3.** En una urna hay N bolas, de las cuales $m \leq N$ son blancas y el resto son negras. Se sacan de una vez n bolas y se denota por X al número de ella que son blancas. (Nota: X así definida se llama v.a. *hipergeométrica* de parámetros N , m y n .)
- (a) Calcupe $\mathbb{P}(X = i)$ para $i = 0, \dots, n$. Explique (en palabras) por qué X tiene (para N fijo) la misma ley que el número de bolas blancas obtenidas al sacar sucesivamente y sin reposición n bolas de las N de la urna.
 - (b) Sea ahora $m = m(N)$ tal que $m/N \rightarrow p$ cuando $N \rightarrow \infty$, con $p \in (0, 1)$. Si $p_i^{(N)}$ denota la probabilidad calculada en a) en función de N . Muestre que para cada $i = 0, \dots, n$ se tiene que $p_i^{(N)} \rightarrow \mathbb{P}(Y = i)$ cuando $N \rightarrow \infty$, donde Y es una v.a. binomial de parámetros (n, p)
 - (c) Dé una interpretación del resultado en b) en términos de qué diferencia hay entre un muestreo con o sin reposición, cuando N es grande (piense por ejemplo en qué ocurre al encuestar gente en la calle).