

Probabilidades: Auxiliar 2

Espacios equiprobables y problemas de conteo

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliares: Bruno Hernández, Tristán Radic

26 de marzo de 2021

P1. [EJERCICIO] De vuelta de un carrete, usted se dispone a abrir la puerta de su departamento, tomando una llave al azar de entre las n llaves de su llavero (una sola de las cuales abre la puerta).

- (a) Si lo hace sin descartar las llaves que ya probó, ¿cuál es la probabilidad de lograr abrir la puerta en el k -ésimo intento?
- (b) Suponga ahora que deja de lado las llaves que ya probó. ¿Cuál es la probabilidad de lograr abrir la puerta en el k -ésimo intento? Comente sobre la dependencia en k obtenida, y dé una explicación simple (sin calcular nada) de ella, asimilando justificadamente este último “experimento aleatorio” a otro equivalente.

P2. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuada para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de $1/2$ o más?

P3. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define F_n como el conjunto de todas las funciones de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, n\}$. Dado $0 \leq k \leq n$, se define

$$A_k := \{f \in F_n : |\{i : f(i) = i\}| = k\}$$

es decir, A_k es el conjunto de funciones en F_n con exactamente k puntos fijos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

- (a) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-k)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$
 - (b) Se escoge una función al azar en F_n . Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k .
 - (c) Calcular p_n , la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.
 - (d) Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{e-1}{e}$.
- P4.** Se deben repartir turnos de trabajo para $2n$ trabajadores. Existen n turnos de noche y n turnos de día. De los $2n$ trabajadores $0 \leq a \leq n$ prefieren de noche y $0 \leq b \leq n$ prefieren de día, el resto de los trabajadores están indiferentes entre trabajar de noche o de día. Si los turnos se reparten al azar, determine la probabilidad de que cada persona le corresponda el turno que quería.

P5. Un grupo de 30 personas va a comer a un restorán, en donde hay preparadas 5 mesas con 6 sillas cada una. ¿De cuántas maneras se pueden sentar las personas si:

- (a) todas las sillas son distinguibles entre sí?
- (b) las sillas en una misma mesa son indistinguibles, pero las sillas en mesas distintas son distinguibles?
- (c) las sillas en una misma mesa son indistinguibles, las sillas en mesas distintas son distinguibles, y 3 de las 30 personas no llegan al restorán?

P6. [PROPUESTO] Calcule la probabilidad de obtener las siguientes manos de *póker* al sacar 5 cartas de un total de 52 (naipe inglés):

- (a) *full house*: tres cartas del mismo valor más una pareja distinta. Por ejemplo, **Q,Q,Q,4,4**.
- (b) *escalera*: cinco cartas consecutivas, no necesariamente de la misma pinta. Ejemplo **4,5,6,7,8**.

Nota: El as puede utilizarse tanto para la primera como para la última carta de la secuencia, siendo esta la única carta que puede utilizarse de este modo. **10,J,Q,K,A** es la escalera más alta; **A,2,3,4,5** es la escalera más baja.