MA2601-6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 25 de junio de 2021

Auxiliar 11: Trasformada de Laplace III

P1. Resuelva el problema de valor inicial:

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

P2. La posición $x(t)$ de un cuerpo de masa $m = 1$ (Kg) atado a un resorte amortiguado tiene por ecuación:

$$x'' + 2x' + 2x = f(t)$$

Suponga que el cuerpo se pone en movimiento en el punto inicial 0, con velocidad $v_0 = -4$(m/seg) y que el cuerpo está sujeto a un golpe de impulso unitario en $t = 1$ y desde $t = 2$ hasta $t = 3$ se le aplica una fuerza constante igual a 1 (Newton). Determine la posición del cuerpo en el instante t.

Indicación: Puede utilizar sin demostrar que $\displaystyle\int_0^t e^{-x}\sin(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$

P3. Calcule la transformada de $|sin(x)|$ descomponiendo los cambios de signos mediante funciones heaviside apropiadas. **Propuesto:** Calcularla utilizando la formula para funciones periódicas del Auxiliar 9, notando que es una función de periodo $T = \pi$

P4. Demostrar que $\forall n \geq 1$, y un real $a \neq 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\right)(t) = \frac{1}{2n}\int_0^t x\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\right)(x)dx$$

Usar lo anterior para probar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\right)(t) = \frac{1}{2^n n! a}\underbrace{\int_0^t x\int_0^x x...}_{n-1\ integrales}\left[\int_0^x x\sin(ax)dx\right]...dxdx$$

Indicación: Defina la función $\phi_n : [0,\infty[\to R$, continua y de orden exponencial tal que: $\mathcal{L}(\phi_n(t))(s) = \dfrac{1}{(s^2+a^2)^n}$ y derive respecto a s.