MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2013-2
Profesor: Emilio Vilches **Auxiliares:** Benjamín Obando y Sebastián Reyes Riffo

Soluciones Guía N°3

10 de noviembre de 2013

1. Problemas de Resolución

1.1. Transformada de Laplace

1. Pruebe que las funciones siguientes son de orden exponencial y encuentre sus transformadas de Laplace.

   a) $\frac{a}{s^2-a2}$.
   b) $\frac{s}{s^2-a^2}$.
   c) $\frac{1}{(s-a)^n}$.
   d) $\frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s)$.
   e) $\frac{a}{s^2+a^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2a}\right)$.
   f) $\frac{2a(3s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^3}$.

2. Calcular las siguientes antitransformadas

   a) $3\cos(3t)+\frac{5}{3}\sin(3t)$.
   b) te^{-2t}.
   c) $(cos(\omega t)+\frac{\lambda}{\omega}\sin(\omega t))e^{t\lambda}$.
   d) $\delta(t)-2ae^{-ta}$.
   e) $\frac{e^{-t}}{2}\left(-2\frac{\sin(t)}{t}+\pi\delta(t)\right)$.
   f) $2\frac{\cos(2t)-\cos(t)}{t}$.
   g) $\frac{1-e^{-t}}{t}$.
   h) $\frac{\sin t - t\cos t}{2}$.

3.
$$y(t)=\begin{cases}-\frac{3}{5}e^{2t}\sin(t)+\frac{4}{5}e^{2t}\cos(t)+\frac{1}{5} & \text{si } t\in[0,1),\\ e^{2t}(\cos(t)-\sin(t)) & \text{si } t\geq 1.\end{cases}$$

4.
$$y(t)=\begin{cases}1-e^{-t}(1+t) & \text{si } t\in[0,1),\\ -1-e^{-t}(1+t)+2te^{1-t} & \text{si } t\in[1,2),\\ -e^{-t}(1+t)-e^{2-t}(t-1)+2te^{1-t} & \text{si } t\geq 2.\end{cases}$$

5. $y(t)=-\sin(t)e^{\pi-t}H(t-\pi)$.

6. $y(x)=(Ax+B)\text{sech}(x)$, donde A y B son constantes.

7. $f(t)=1+\frac{t^2}{2}$

8.
$$y(t)=\begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{11}{12}e^{2t}+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t & \text{si } t\in[0,2)\\ \frac{2}{3}e^{2-t}-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{11}{12}e^{2t}+\frac{13}{12}e^{2t-4} & \text{si } t\in[2,\infty)\end{cases}$$

9.
$$\begin{cases}x(t)=(6e^{2t}-5e^{3t})x_0+(10e^{3t}-10e^{2t})y_0,\\ y(t)=(-3e^{3t}+3e^{2t})x_0+(-5e^{2t}+6e^{3t})y_0.\end{cases}$$

10.
$$\begin{cases}I(t)=-5-\dfrac{4}{3}V_0e^{\frac{5}{4}t}\sinh(\dfrac{3}{4}t)-\dfrac{1}{3}e^{2t}(I_0+1)+\dfrac{4}{3}e^{t/2}(I_0+4),\\ V(t)=2+\dfrac{1}{3}V_0(4e^{2t}-e^{t/2})+\dfrac{2}{3}\left(-3\cosh(\dfrac{3}{4}t)+\sinh(\dfrac{3}{4}t)(2I_0+5)\right)e^{\frac{5}{4}t}.\end{cases}$$

11.
$$y(t) = \sin(t) + \frac{1}{5}\left(e^{-2t} + (2\sin(t-2) - \cos(t-2))e^{-4}\right) H(t-2).$$

12. (i) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[-p^2 y(t)](s) &= -p^2 Y(s), \\
\mathcal{L}[t^2 y(t)](s) &= Y''(s), \\
\mathcal{L}[t y'(t)](s) &= \frac{d}{ds}(-\mathcal{L}([y'(t)](s)) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -Y(s) - sY'(s), \\
\mathcal{L}[t^2 y''(t)](s) &= \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}[y''(t)](s)) = \frac{d^2}{ds^2}(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) \\
&= 2Y(s) + 4sY'(s) + s^2 Y''(s).
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos:

$$\mathcal{L}[t^2 y''(t)](s) + \mathcal{L}[t y'(t)](s) + \mathcal{L}[t^2 y(t)](s) + \mathcal{L}[-p^2 y(t)](s) = 0,$$

al reemplazar los cálculos se tiene:

$$2Y(s) + 4sY'(s) + s^2 Y''(s) - Y(s) - sY'(s) + Y''(s) - p^2 Y(s) = 0,$$

es decir

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1-p^2)Y(s) = 0.$$

(ii) Poniendo $p = 0$ obtenemos:

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + Y(s) = 0,$$

que podemos escribirlo en la forma

$$\frac{d}{ds}[(1+s^2)Y'(s) + sY(s)] = 0.$$

Integrando esta última ecuación tenemos:

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = c_1,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La correspondiente ecuación homogénea es:

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{s}{1+s^2},$$

que tiene por solución

$$Y_h(s) = \frac{c}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Para la otra solución podemos usar la fórmula de Liuoville, tomando $Y_1(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$. Así

$$\begin{aligned}
Y_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \int (1+s^2)\, e^{-\int \frac{3s}{1+s^2} ds} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \int (1+s^2)(1+s^2)^{-3/2} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \ln(s + \sqrt{1+s^2}).
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$Y(s) = \frac{c_1}{\sqrt{1+s^2}} \ln(s + \sqrt{1+s^2}) + \frac{c_2}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Otra alternativa es considerar $Y_p(s) = \frac{c(s)}{\sqrt{1+s^2}}$ y encontrar $c(s)$. Sustituyendo en la ecuación de 1er orden nos resulta:

$$\sqrt{1+s^2}\, c'(s) = c_1,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} c(s) &= c_1 \int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} + c_2 \\ &= c_1 \ln(s + \sqrt{1+s^2}) + c_2. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$Y(s) = \frac{c_1}{\sqrt{1+s^2}} \ln(s + \sqrt{1+s^2}) + \frac{c_2}{\sqrt{1+s^2}}.$$

13. $y(t) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$.

1.2. Sistemas de EDO's Lineales

1. *a)*

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x_0.$$

b)

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{10}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{10}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x_0.$$

c)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 2e^{3s} \end{pmatrix} ds.$$

d)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$x(t) = \int_0^t \Phi(t-s) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} ds.$$

2.

3. Encuentre e^{tA} para las siguientes matrices:

a)

$$e^{tA} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{11t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} e^{-4t}\cos(8t) & e^{-4t}\sin(8t) \\ -e^{-4t}\sin(8t) & e^{-4t}\cos(8t) \end{pmatrix}.$$

4.

5. *a)* Calculamos el polinomio característico,

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(-4-\lambda) - 20 = (\lambda+8)(\lambda-1)$$

luego los valores propios son: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -8$. Ahora calculamos los vectores propios:

1) Para λ_1:

$$\begin{pmatrix} -3-1 & 5 \\ 4 & -4-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} -4v + 5w &= 0 \\ 4v - 5w &= 0 \end{aligned}$$

Luego $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a λ_1.

2) Para $\lambda_2 = -8$:

$$\begin{pmatrix} -3+8 & 5 \\ 4 & -4+8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 5v + 5w &= 0 \\ 4v + 4w &= 0 \end{aligned}$$

Luego $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado a λ_2. Luego la solución general del sistema es

$$X(t) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-8t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5C_1 e^t - C_2 e^{-8t} \\ 4C_1 e^t + C_2 e^{-8t} \end{pmatrix}$$

b) Para que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ debemos imponer que $C_1 = 0$. Luego la condición inicial debe tener la forma:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

6. *a*)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

c) (i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2. Problemas Aplicados

1.

2.

3.