MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2013-2
Profesor: Emilio Vilches **Auxiliares:** Benjamín Obando y Sebastián Reyes Riffo

Guía N°3

7 de noviembre de 2013

1. Problemas de Resolución

1.1. Transformada de Laplace

1. Pruebe que las funciones siguientes son de orden exponencial y encuentre sus transformadas de Laplace.

   a) $f(t) = \sinh(at)$.
   b) $f(t) = \cosh(at)$.
   c) $f(t) = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$.
   d) $f(t) = \int_0^t g(s)ds$, g de orden exponencial.
   e) $f(t) = |\sin(at)|$.
   f) $f(t) = t^2 \sin(at)$.

2. Calcular las siguientes antitransformadas

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+5}{s^2+9}\right)$.
   b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s+2)^2}\right)$.
   c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\right)$.
   d) $\mathcal{L}^{-1}(\ln s)$
   e) $\mathcal{L}^{-1}[\arctan(s+1)]$.
   f) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\ln(\dfrac{s^2+1}{s^2+4})\right]$.
   g) $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right)$.
   h) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)$.

3. Determine la solución de la EDO
$$y'' - 4y' + 5y = f(t);\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$$
donde $f(t) = 1$ si $t \in [0, 1)$, $f(t) = 0$ si $t \in [1, \infty)$.

4. Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial
$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2-t, & 1 \le t < 2, \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$$
sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

5. Resuelva el siguiente problema con condición inicial
$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

6. Encuentre la solución general en $\mathbb{R}$ de la ecuación
$$y'' + 2\tanh(x)y' + y = 0.$$
Indicación: Sea $\mathcal{L}(y) = y' + \tanh(x)y$. Calcule $\mathcal{L}(\mathcal{L}(y))$.

7. Resolver con transformada de Laplace la siguiente ecuación integral:
$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{sen}\,(x-t)dx = -\frac{1}{2}tf'(t) \text{ tal que } f(0) = 1.$$

8. Resolver con transformada de laplace:

$$y'' - y' - 2y = f(t) \text{ con } y(0) = 1 \; y'(0) = 2,$$

donde $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 < t < 2, \\ t^2 + t - 2 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$

9. Usando Transformada de Laplace, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -3x(t) + 10y(t), \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = -3x(t) + 8y(t), \\ y(0) = y_0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

10. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales representa la corriente (I) y el voltaje (V) en un circuito eléctrico. Encuentre la solución general sistema usando transformada de Laplace.

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -V(t) + 2 \\ \dfrac{dV}{dt} = I(t) + \dfrac{5}{2}V(t) \\ I(0) = I_0 \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

11. Resuelva usando la Transformada de Laplace la ecuación diferencial

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 2 \\ e^{-2t} & , \quad t \geq 2 \end{cases}$$

12. Considere la ecuación de Bessel de orden p:

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - p^2) y(t) = 0.$$

(i) Si $y(t)$ es una solución muestre que la Transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ satisface

$$(1 + s^2) Y''(s) + 3s Y'(s) + (1 - p^2) Y(s) = 0.$$

(ii) Resolver esta última ecuación para $p = 0$, expresándola en la forma:

$$\frac{d}{ds}[A(s) Y'(s) + B(s) Y(s)] = 0,$$

para algún $A(s)$ y $B(s)$.
Indicación: Recuerde la Formula Liouville $y_2 = y_1 \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(s) ds} ds$

13. Resuelva la ecuación integral:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau.$$

1.2. Sistemas de EDO's Lineales

1. Resuelva los siguientes sistemas.

   a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} x.$

   b) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} x.$

   c) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}.$

   d) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2. Resuelva $x' = Ax$, para $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. *Indicación:* Escriba $A = \lambda I + N$.

3. Encuentre e^{tA} para las siguientes matrices:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}.$

4. Sea A matriz de $n \times n$ que satisface $A^2 + A = -I$. Encuentre la solución general del sistema $x' = Ax$.

5. Considere el sistema $x' = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} x.$

   a) Determine la solución general de este sistema.

   b) Sea $x(t)$ la solución del sistema con $x(0) = x_0$ ¿para qué condiciones iniciales x_0 se tiene que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?

6. Encuentre la forma de Jordan de las siguientes matrices:

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

   c) $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ en los casos:

      (i) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

      (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$.

2. Problemas Aplicados

1. Se tiene un sistema de calefacción formado por una caldera con agua a temperatura inicial T_0. El flujo de entrada y de salida es de 2 litros por minuto. El agua entra a una temperatura igual a T_e grados. Se cuenta con una fuente de energía que entrega a la caldera una temperatura constante igual a G grados, pero sólo se puede mantener encendida por un tiempo igual a ℓ minutos. La ecuación que modela el problema está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = 2(T_e - T) + f(t) \tag{1}$$

donde $T(t)$ es la temperatura de agua en la caldera y $f(t)$ representa la temperatura que entrega la fuente de energía. Supondremos que:

$$\frac{T_0}{2} \leq T_e < T_0 < G. \tag{2}$$

   a) Escriba $f(t)$ como combinación de funciones escalón (o de Heaviside).
   b) Resuelva la ecuación usando transformada de Laplace y pruebe que la solución $T(t)$ es continua para $t > 0$.
   c) Analice crecimiento por intervalos y encuentre la temperatura máxima que alcanza el agua de la caldera.
   d) Determine el tiempo durante el que el agua de la caldera posee una temperatura mayor o igual a T_0.

2. Consideremos un resorte elástico que cuelga de un extremo fijo y cuyo otro extremo es libre de oscilar en dirección vertical. La ecuación que modela el movimiento de una masa m sujeta al extremo libre del resorte está dada por

$$m\frac{d^2y}{t^2} + ky = h(t),$$

donde $y(t)$ es la posición de la masa en el instante t con respecto a la posición de equilibrio, $k > 0$ es la constante del resorte y $h(t)$ es una fuerza externa arbitraria. En lo que sigue, supondremos que inicialmente el sistema masa-resorte estaba en equilibrio de modo tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

   a) Pruebe que $y(t)$ admite la siguiente expresión integral:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}} \int_0^t \sin\left(\omega(t-\zeta)\right) h(\zeta) d\zeta,$$

   donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema masa-resorte.

   b) Encuentre la solución explícita cuando:
      (a) $h(t) = h_0$ (constante)
      (b) $h(t) = A\sin(\omega t)$. Recuerde que $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$.
   c) Ahora queremos determinar la respuesta del sistema cuando la masa es "golpeada"sorpresivamente en un instante $t = a > 0$ luego de haber permanecido en reposo. Esta situación puede modelarse considerando una fuerza externa de la forma

$$h(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ 1/\sigma & a < t < a + \sigma \\ 0 & a + \sigma \leq t, \end{cases}$$

   donde $\sigma > 0$ es "pequeño". Físicamente, $h(t)$ representa una fuerza de magnitud $1/\sigma$ que actúa sobre el sistema durante un tiempo σ a partir del instante $t = a$. Determine la solución en este caso.

3. Se sabe que los soldados al cruzar un puente deben evitar marchar en cadencia. Para explicar esto, considere el siguiente modelo sencillo para las oscilaciones de un puente excitado por impulsos periódicos:

$$u'(t) + u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - 2k\pi).$$

Demuestre que si $u(0) = u'(0) = 0$ entonces $u(t) = A(t)\sin(t)$ donde $A(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ (encuentre $A(t)$ explícitamente).

Propiedades: Sea $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$.

1. $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$.
2. $\mathcal{L}[t^k] = \dfrac{k!}{s^{k+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$.
4. $\mathcal{L}[H_a(t)] = \dfrac{1}{s}\, e^{-as}$.
5. $\mathcal{L}[H_a(t)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$.
6. $\mathcal{L}[\int_a^t f(u)du] = \dfrac{1}{s}F(s) - \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^a f(u)du$.
7. $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$.
8. $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)du$.
9. $\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$.