La forma del lacolito $w(x)$ se puede modelar con el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} Rw^{(4)} = & p - \rho g h \\ w(L) = & w(-L) = w'(L) = w'(-L) = 0 \end{cases}$$

donde R es la rigidez flexural de la capa de la corteza, ρ su densidad, g la aceleración de gravedad, h el espesor de la capa de la corteza y p la presión ejercida por la intrusión magmática. R, ρ, g, p y h se consideran constantes positivas y que la presión es suficientemente grande para que $p > \rho g h$.

a) Encuentre la solución general de la ecuación, es decir, $w = w_h + w_p$. Para la solución particular, proponga $w(x) = cx^n$, para $c, n \in R$ constantes que debe determinar.

b) Imponiendo las condiciones de borde encuentre la forma exacta del lacolito $w(x)$.

c) Muestre que el alzamiento máximo ocurre en $x = 0$ y determine su valor. Justifique que se trata de un máximo.

a) Para W_H basta usar $p(\lambda) = \lambda^4 = 0 \Rightarrow \{1, x, x^2, x^3\}$

$\Rightarrow W_H(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

Buscando encontrar c y n, reemplazamos W_p

$Rcn(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} = p - \rho g h \Rightarrow n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$

$R\,24c = p - \rho g h$

$\Rightarrow \boxed{W(x) = W_H(x) + \dfrac{p - \rho g h}{24R} x^4}$

Por comodidad

$K = \dfrac{p - \rho g h}{24R}$

b) $A + BL + CL^2 + DL^3 + KL^4 = 0$ (1)

$A - BL + CL^2 - DL^3 + KL^4 = 0$ (2)

$B + 2CL + 3DL^2 + 4KL^3 = 0$ (3)

$B - 2CL + 3DL^2 - 4KL^3 = 0$ (4)

$\left.\begin{array}{l} (3)+(4) \Rightarrow 2B + 6DL^2 = 0 \\ (1)-(2) \Rightarrow 2BL + 2DL^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B = D = 0$

$\left.\begin{array}{l} (3) \Rightarrow 2CL = -4KL^3 \Rightarrow C = -2KL^2 \\ (1)\ A - 2KL^4 + KL^4 = 0 \Rightarrow A = KL^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{W(x) = KL^4 - 2KL^2x^2 + Kx^4}$

$\Rightarrow w'(x) = -4kL^2x + 4kx^3 = 0$

$\Rightarrow x\,4k(x^2 - L^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$x_2 = L$
$x_3 = -L$

$w''(x) = 4k(3x^2 - L^2) \Rightarrow w''(0) < 0$
$w''(L) = w''(-L) > 0$

$\Rightarrow$ Que $x=0$ es el máximo, por convexidad

Extra

Si no nos dan w_p, se puede calcular como en $\boxed{P_3}$

$y_p = \alpha e^{0x} \cdot x^4$, pues es resonante $\lambda = 0$

$D^4 y_p = \alpha \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \dfrac{P - \rho g h}{R}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{P - \rho g h}{24R}$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = \frac{P - \rho g h}{24R} \cdot x^4}$$