MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2013-2
Profesor: Emilio Vilches **Auxiliares:** Benjamín Obando y Sebastián Reyes Riffo

Resumen

13 de diciembre de 2013

- Integración directa:
$$y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad y = \int f(x)dx + c.$$
- Variables separables:
$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$
- EDO lineal de primer orden:
$$y' + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q}(x).$$
Factor integrante: $\mu(x) = \exp\left(\int \bar{a}_0(x)dx\right)$.
- $y' = f(ax + by + c) \quad \Rightarrow \quad z = ax + by + c$.
- Ecuación homogénea:
$$y' = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad z = y/x,$$
donde $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$.
- $$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$
  - Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, entonces, $\zeta = x - x_0$ y $\eta = y - y_0$, donde (x_0, y_0) es solución del sistema
  $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$
  - Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, entonces, $z = y/x$.
- Ecuaciones exactas:
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$
  - La EDO (1) es exacta si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
  - $u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y)$ y
  $$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right).$$
  - La solución es $u(x, y) = \text{cte}$.
- Ecuación de Bernoulli:
$$y'(x) + p(x)y = q(x)y^n \quad n \neq 0, 1.$$
Se hace el c.v. $z = y^{1-n}$.
- Ecuación de Ricatti:
$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x).$$
Si y_p es una solución particular, se hace el c.v. $y = y_p + \frac{1}{z}$.
- $$G(x, y', y'') = 0 \quad \Rightarrow \quad z = y'.$$
- $$H(y, y', y'') = 0.$$
Se hace $p = \frac{dy}{dx}$, entonces $H\left(y, p, p\frac{dp}{dx}\right) = 0$.
- EDO lineal de segundo orden homogénea:
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (2)$$
La solución de la EDO (2) está dada por
$$y(x) = Ay_1 + By_2.$$
- Fórmula de Abel: Si y_1 es conocido
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{y_1^2(x)}dx.$$
- EDO lineal se segundo orden homogénea a coeficientes constantes:
$$ay'' + by' + cy = 0.$$
Valores característicos: $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
  - $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$.
  - $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$.
  - $\lambda = \alpha \pm \beta i \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)$.
- Wronskiano:
Si $y_1, \ldots, y_n \in C^n(I)$
$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n) = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

- EDO lineal de segundo orden no homogénea:
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = Q(x). \tag{3}$$
La solución de la EDO (3) está dada por
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_p,$$
donde y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea.

- Variación de parámetros:
$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{Qy_2}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{Qy_1}{W(y_1, y_2)} dx.$$

- EDO lineal de orden n:
$$P(x, D)y(x) = Q(x),$$
donde
$$P(x, D) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)}(x)$$

- EDO lineal de orden n normalizada:
$$\bar{P}(x, D)y(x) = \bar{Q}(x),$$
donde
$$\bar{P}(x, D) = P(x, D)/a_n(x),$$
$$\bar{Q}(x) = Q(x)/a_n(x).$$

- Los espacios H y S:
$$H = \left\{ y \in C^n(I) \colon \bar{P}(x, D) = 0, \, \forall x \in I \right\},$$
$$S = \left\{ y \in C^n(I) \colon \bar{P}(x, D) = \bar{Q}(x), \, \forall x \in I \right\}.$$
Se tiene que:
  - H es un s.e.v. de $C^n(I)$ de dimensión n.
  - Si $y_p \in S$ entonces $S = H + y_p$.

- Si $y_1, \ldots, y_n \in H$ se tiene la fórmula de Abel:
$$W(x) = C \exp\left(- \int \bar{a}_{n-1}(x) dx \right).$$

- Sean $y_1, \ldots, y_n \in C^n(I)$.
  - Si $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces $y_1, \ldots, y_n$ son l.i.
  - Si $y_1, \ldots, y_n \in H$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
    - $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$.
    - $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.
    - $y_1, \ldots, y_n$ son l.i.

- EDO lineal homogénea de orden n a coeficientes constantes:
$$\bar{P}(x, D)y = \bar{P}(D)y = 0. \tag{4}$$
Se define el p.c.
$$p(\lambda) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \cdots + \bar{a}_1\lambda + \bar{a}_0.$$
Las raíces del p.c. son los valores característicos.

- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ son v.c. con multiplicidades $m_1, \ldots, m_\ell$ de (4). Una base para H son las funciones
  - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene multiplicidad m:
$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}.$$
  - Si $\lambda = \alpha \pm \beta i$ de multiplicidad m:
$$e^{\lambda x}\cos(\beta x), xe^{\lambda x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}\cos(\beta x).$$
$$e^{\lambda x}\sin(\beta x), xe^{\lambda x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\lambda x}\sin(\beta x).$$

- EDO lineal no homogénea de orden n:
$$\bar{P}(x, D)y = \bar{P}(D)y = \bar{Q}. \tag{5}$$

- Coeficientes indeterminados:
$$\bar{P}(D)y = q_{k_0} q^{\lambda_0 x}, \tag{6}$$
donde $\lambda_0 \in C$ y q_{k_0} es una función que puede ser un polinomio por una exponencial, un polinomio por seno o coseno por una exponencial o cualquier combinación lineal de estos, donde $\mathrm{gr}(q_{k_0}) \leq k_0$. Denotamos por λ_j, $j = 1, \ldots, n$ los v.c. de (6).
  - Caso no resonante: $\lambda_0 \neq \lambda_j$ para todo $j = 1, \ldots n$.
    - Caso real: $\lambda_0 = \alpha \in \mathbb{R}$.
$$y_p(x) = r(x)e^{\alpha x},$$
donde $\mathrm{gr}(q) = k_0$.
    - Caso complejo: $\lambda_0 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$.
$$y_p(x) = r(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + s(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$
donde r y s tienen grado k_0.
  - Caso resonante: $\lambda_0 = \lambda_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ y m es la multiplicidad del v.c. λ_0.
    - Caso real: $\lambda_0 = \alpha \in \mathbb{R}$.
$$y_p(x) = x^m p(x)e^{\alpha x},$$
donde $\mathrm{gr}(p) = k_0$.
    - Caso complejo: $\lambda_0 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$
$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x) + x^m s(x)\sin(\beta x),$$
donde r y s tienen grado k_0.

- Ecuación de Euler:
$$x^n y^{(n)}(x) + \bar{a}_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + \bar{a}_0 y(x) = 0.$$
Se hace el c.v. $z(u) = y(e^u)$. Así
$$z(u) = y(e^u)$$
$$z'(u) = y'(e^u)e^u$$
$$z''(u) = y''(e^u)x^2 + y'(e^u)x$$

- Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

- Transformadas usuales:
  - $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$.
  - $\mathcal{L}[t^k] = \dfrac{k!}{s^{k+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$.
  - $\mathcal{L}[H_a(t)] = \dfrac{1}{s}\, e^{-as}$.
  - $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.
  - $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.
  - $\mathcal{L}(\sinh(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$.
  - $\mathcal{L}(\cosh(\omega t)) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$.

- Reglas de cálculo:
  Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$.
  - $\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0^+)$.
  - $\mathcal{L}\left[\int_0^t \cdots \int_0^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s^n} F(s)$
  - $\mathcal{L}[H_a(t) f(t-a)] = e^{-as} F(s)$.
  - $\mathcal{L}[\int_a^t f(u)du] = \dfrac{1}{s} F(s) - \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^a f(u)du$.
  - $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$.
  - $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)du$.
  - $\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$.