P1 **[Ecuaciones de integración directa]** Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $y' = \tan(2x)^2\sec(2x)^2$ *b)* $y' = \dfrac{e^x+5}{e^x+5x}$ *c)* $y' = xe^{-2x}$

a) $y' = \tan(2x)^2 \sec(2x)^2$

Recordemos que tangente tiene coseno en el denominador que se anula en .....

$k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

El dominio va a ser $\mathbb{R} - \{ \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \}$

$y' = \tan^2(2x)\sec^2(2x) \quad / \int dx$

$\boxed{\tan(x)' = \sec^2(x)}$

$y = \int \tan^2(2x)\sec^2(2x)\,dx$

Consideremos $u = \tan(2x)$

$\frac{du}{2} = \sec^2(2x)\cdot \cancel{2}\,dx$

$y = \int \frac{u^2}{2}\,du = \frac{u^3}{6} + C$

$\boxed{y = \frac{\tan^3(2x)}{6} + C}$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \}$

b) Indicación $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln(|f(x)|) + C$

c) $y' = xe^{-2x}$

Consejo
$P(x)e^{ax}$ VACA
$\cos(bx)\,e^{bx}$ VACA

Consejo $P(x)e^{ax}$ vaca

$\cos(ax)\, e^{bx}$ vaca

c) $y' = x e^{-2x}$

$= \dfrac{x}{e^{2x}}$

$\Rightarrow$ Dominio es $\mathbb{R}$ porque $e^{x} > 0$

$\int dx$

$\Rightarrow \quad y = \int x e^{-2x}\, dx$

$u = x$

$dv = e^{-2x} dx$

$du = dx$

$v = \dfrac{e^{-2x}}{(-2)}$

$$y = \frac{xe^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{(-2)} \cdot dx = \frac{xe^{-2x}}{-2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

$$\boxed{y = -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1) + C}$$

b) $y' = \dfrac{e^{x} + 5}{e^{x} + 5x} \quad / \int$

$y = \ln(|e^{x} + 5x|) + C$

Con Dominio $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^{x} \pm 5x$

P2. **[Ecuaciones de variables separables]** Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $xy^4 + (y^2+2)e^{-3x}y' = 0$

b) $y' = (y-2)(y+2)$

a) $(y^2+2)e^{-3x}y' = -xy^4$

$$y' = -xe^{3x}\cdot \overbrace{\left(\frac{y^4}{y^2+2}\right)}^{g(y)}$$

$g(y)=0 \Rightarrow y=0$

$y\equiv 0$ es solución de la Ecuación

Trabajamos con dominio $y\neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'(y^2+2)}{y^4} = -xe^{3x} \quad /\int$$

$$\int \frac{y^2+2}{y^4}\,dy = -\int xe^{3x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy + \int \frac{2}{y^4}\,dy = -\int xe^{3x}\,dx$$

$$\boxed{-\frac{1}{y} + \frac{(-2)}{3y^3} = -\frac{xe^{3x}}{3} + \frac{e^{3x}}{9} + C}$$

LA solución quedo implicita

b) $y' = (y-2)(y+2)$

Soluciones Directas: $y \equiv 2$, $y \equiv -2$

Trabajemos con $y \neq 2$ e $y \neq -2$

$$\frac{y'}{(y-2)(y+2)} = 1 \qquad / \int$$

$$\int \frac{dy}{(y-2)(y+2)} = \int dx = x + C$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right) = \frac{1}{y^2-4}} \qquad \int \frac{1}{y-2} dy = \ln(|y-2|) + C$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln(|y-2|) - \ln(|y+2|)\right] = x + C$$

$$\ln\left(\left|\frac{y-2}{y+2}\right|\right) = 4x + \tilde{C}$$

Lo dejaremos implisito ~~hasta Desarrollar~~

Como hay un valor absoluto de $\left|\frac{y-2}{y+2}\right|$ es mejor dejarlo implicito

P3. [Ecuaciones con cambios previos] Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $y' = \dfrac{1-x+y}{x+y}$

b) $y' = 1 + e^{y-x+5}$

c) $y' = 2 + \sqrt{y-2x+3}$

d) $y' = (-5x+y)^2 + 1$

$z = y - 2x$

$z = -5x + y$

Ec homogenea

$$\frac{ax+by}{cx+dy} = y'$$

$$1 - x + y = -X + Y$$

$$x + y = X + Y$$

$$1 + 2y = 2Y \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Y &= y + \tfrac{1}{2} \\ X &= x - \tfrac{1}{2} \end{aligned}}$$

$$Y' = \frac{-X+Y}{X+Y}$$

¿ $y' = Y'$?

$$Y' = \frac{-1 + \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

$z = \frac{Y}{X}$

$Xz = Y$

$z + Xz' = Y'$

$$z + Xz' = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow Xz' = \frac{z - 1 - \overbrace{z(z+1)}^{-z^2-z}}{z+1}$$

$= -z^2 - 1$

$z+1$ $\qquad$ $z+1$

$$= -\frac{z^2-1}{z+1}$$

$$\Rightarrow z' = -\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

v.s $\displaystyle\int \frac{z+1}{z^2+1}\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2z}{z^2+1}\,dz + \int \frac{1}{z^2+1}\,dz = -\ln(|x|) + C$$

$$\frac{1}{2}\ln(z^2+1) + \mathrm{ATan}(z) = -\ln(|x|) + C$$

Remplaza para atras todos los cambios

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)^2+1\right) + \mathrm{ATan}\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right) = -\ln(|x|) + C$$

6) $y' - 1 = e^{y-x+5}$ $\qquad$ / $z = y - x$

$z' = y' - 1$

$$z' = e^{z+5}$$

v.s $\displaystyle\int e^{-z}\,dz = \int e^{5}\,dx$

$$\cancel{-}e^{-z} = -xe^{5} + C \quad /\ln(|\ |)$$

$$\cancel{-}z = -\ln(\vdash x e^{s} + c)$$

$$z = -\ln(\vdash x e^{s} + c)$$

$$\boxed{y = x - \ln(\vdash x e^{s} + c)}$$

c) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

$z = y - 2x + 3$

$z' = y' - 2$

Reemplazando

$$z' = \sqrt{z}$$

VS.S

$$\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \int dx$$

$$2\sqrt{z} = x + c \qquad / \cdot \tfrac{1}{2} \; y \; ()^2$$

$$z = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \qquad / \; z = y - 2x + 3$$

$$\boxed{y = 2x - 3 + \left(\frac{x+c}{2}\right)^2}$$

d) $y' = (-5x + y)^2 + 1$

$/ z = y - 5x$

$z' = y' - 5$

$\Rightarrow y' = z' + 5$

$$z' + 5 = z^2 + 1$$

$$z' = z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$$

$z' = z - 4 = (z-2)(z+2)$

nr. 5 $\displaystyle\int \frac{dz}{(z-2)(z+2)} = \int dx = x + c$

$$\int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2}\right) dz = x + c$$

$$\cancel{\frac{1}{4}} \ln\left(\frac{|z-2|}{|z+2|}\right) \overset{4.}{=} x + c \qquad /e$$

$$\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = K e^{4x}$$

$$\boxed{\left|\frac{10-5x-2}{10-5x+2}\right| = K e^{4x}}$$

P4. Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa que es proporcional a la masa de isótopo presente.

a) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo en el instante t, demostrar que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$ para alguna constante $\lambda > 0$ llamada constante de desintegración.

b) El tiempo T en el que la masa del isótopo se reduce a la mitad se denomina vida media del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600 años, determine la masa restante de carbono 14 al cabo de t años, considerando que inicialmente la masa de la muestra era de x_0.

c) Si se sabe que para el año 2021 habría decaído el 75 % del carbono 14 presente en un cráneo encontrado en el valle central de Chile, determinar el año en que falleció el cavernícola a quien perteneció ese cráneo.

cambio negativo
disminuir

a) $x'(t) = -\lambda x(t)$

v.s $\quad \frac{x'(t)}{x(t)} = -\lambda$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \lambda \, dt \Rightarrow \ln(x) = -\lambda t + c$$

exp

$$\Rightarrow x(t) = K \cdot e^{-\lambda t}$$

e^c

$$x(0) = K \cdot e^0 = K \Rightarrow \boxed{x(t) = x(0)\, e^{-\lambda t}}$$

b) $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$

$$\frac{\cancel{x_0}}{2} = \cancel{x_0} e^{-\lambda 5600} \Rightarrow e^{5600\lambda} = 2$$

ln( )

$$\Rightarrow 5600\lambda = \ln(2)$$

$$\lambda = \ln\left(2^{\frac{1}{5600}}\right)$$

$$x(t) = x_0 \, e^{\ln\left(2^{\frac{1}{5600}}\right)(-t)} = x_0 \, e^{\ln\left(2^{-\frac{t}{5600}}\right)}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \, 2^{-\frac{t}{5600}}}$$

$$\boxed{X(t) = x_0\, 2^{-\frac{t}{5600}}}$$

c) $\dfrac{x_0}{4} = x_0\, 2^{-\frac{t}{5600}}$

$\cancel{x_0}\, 2^{-2} = \cancel{x_0}\, 2^{-\frac{t}{5600}}$

$\Rightarrow \boxed{t = 11200}$

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 11200 \\ \hline \boxed{9179 \text{ a.C}} \end{array}$$

Prop1 [Ecuaciones para resolver] Al resolver indique el dominio en donde esta definida la solución.

a) $y' = \dfrac{1}{\arctan(x)(x^2+1)}$

b) $y' = \dfrac{e^x x^5}{e^x x^6 + 2017e^x}$

c) $y' = \cos(4x)^2$

d) $y' = x^2 \ln(x)$

e) $y' = y^2 - y - 2$

f) $y' = \sin(x)(\cos(2y) - \cos^2(y))$

g) $y' = \dfrac{x-y+4}{y+2x-2}$

h) $y' = \dfrac{2y-x+2}{4}$

a) $\int \frac{1}{\operatorname{Artan}(x)(x^2+1)} dx$ $\quad u = \operatorname{Artan}(x)$, $\quad du = \frac{dx}{x^2+1}$

$\int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + C = \ln(|\operatorname{Artan}(x)|) + C$

b) $\frac{1}{6}\int \frac{\cancel{e^x}\, 6x^5}{\cancel{e^x} x^6 + 2017\cancel{e^x}} dx = \frac{1}{6}\ln(x^6 + 2017) + C$

c) $\int \cos(4x)^2 dx = \int \frac{1+\cos(8x)}{2} dx$ $\qquad \cos(a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$\sin(a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$y = \frac{x}{2} + \frac{\sin(8x)}{16} + C$

d) $\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C$

$\int x\ln(x) dx =$ Algo Sale ???

$\int x^2 \ln(x) dx$ $\qquad u = x^2$, $dv = \ln(x)dx$ $\Rightarrow$ $du = 2x$, $v =$ $\int \ln(x) dx = x(\ln(x)-1)$

$I = x^2(x(\ln(x)-1)) - \int (2x)\, x(\ln(x)-1)\, dx$

$= x^3\ln(x) - x^3 - 2I + \int 2x^2 dx$

$\Rightarrow \quad 3I = x^3\ln(x) - x^3 + \frac{2x^3}{3}$

$$\boxed{I = \frac{x^3}{9}\left(3\ln(x) - 1\right)}$$

Verificando $\quad 3\frac{x^2}{9}\left(3\ln(x) - \cancel{1}\right) + \cancel{3}\frac{x^3}{9x}$

g) $y' = y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1)$

v.s $\quad \int \frac{1}{(y-2)(y+1)} dy = \int dx = x + C$

$$\int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+1}\right) dy = x + C$$

$$\ln\left(\left|\frac{y-2}{y+1}\right|\right) = 3x + \tilde{C} \;/\; e$$

$$\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = Ke^{3x}$$

$$y' = \sin(x)\left(\cos(2y) - \cos(y)^2\right)$$

$$y' = \sin(x)\left(-\sin(y)^2\right)$$

v.s $\Rightarrow \int \frac{dy}{-\sin(y)^2} = \int \sin(x) = -\cos(x) + C$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\right) = \frac{-\sin(y)^2 - \cos(y)^2}{\sin(y)^2} = -\frac{1}{\sin(y)^2}}$$

$$\frac{1}{dy}\left(\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\right) = \frac{-\sin(y)^2 - \cos(y)^2}{\sin(y)^2} = -\frac{1}{\sin(y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = \mathrm{CoTan}(y) = -\cos(x) + C$$

$$\boxed{y = \mathrm{ArcoTan}(C - \cos(x))}$$

$$y' = \frac{x-y+4}{y+2x-2}$$

$$X - Y = x - y + 4$$

$$Y + 2X = y + 2x - 2$$

$$3X = 3x + \frac{2}{3}$$

$$Y = y - \frac{10}{3}$$

$$Y' = \frac{X-Y}{Y+2X} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{2+\frac{Y}{X}}$$

$$\boxed{z = \frac{Y}{X}}$$

$$Y = Xz \Rightarrow Y' = z + Xz'$$

$$z + Xz' = \frac{1-z}{2+z} \Rightarrow Xz' = \frac{1-z-2z-z^2}{2+z}$$

$$z' = \left(\frac{1-3z-z^2}{2+z}\right)\frac{1}{X}$$ Hacer v.s

$$z = \left(\frac{1-3z-z}{z+2} \right) \frac{1}{x} \qquad \text{Hacer v.s}$$

h) $$y' = \frac{2y-x+2}{4} = \frac{y}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \qquad / \quad \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = z$$

$$\frac{y'}{2} - \frac{1}{4} = z'$$

$$\Rightarrow y' = 2z' + \frac{1}{2}$$

$$2z' + \cancel{\tfrac{1}{2}} = z + \cancel{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{2z'}{z} = 1 \qquad \text{v.s}$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln(|z|) = x + c \Rightarrow |z| = K e^{\frac{x}{2}}$$

$$\left| y - \frac{x}{2} \right| = \tilde{K} e^{\frac{x}{2}} \quad ■$$

Prop2 La ley de enfriamiento de Newton dice:

Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo entre el cuerpo y la atmósfera es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente. Llamemos $T(t)$ a la temperatura del mar y $T_A(t)$ a la temperatura ambiental. El principio anterior nos permite construir el siguiente modelo.

$$T'(t) = k(T_A(t) - T(t))$$

Donde $k > 0$ es una constante llamada coeficiente de transferencia térmica. Digamos que la temperatura inicial del mar es $T(0) = T_0$ y que $T_A(t) = T_A^0 + A\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Encuentre la temperatura del mar en función del tiempo.

$$T'(t) = K(T_A(t) - T(t))$$

$$T'(t) + KT(t) = KT_A(t) \qquad / \mu(t)$$

$$\mu(t)T'(t) + \mu(t)KT(t) = \mu(t)KT_A(t)$$

Si: $\mu'(t) = K\mu(t)$, usemos $\mu(t) = e^{Kt}$

$$(e^{Kt}T(t))' = e^{Kt}KT_A(t) \qquad / \int dt$$

$$\cancel{e^{Kt}}\, T(t) = \int e^{Kt} K T_A(t)\, dt$$

$$= \int e^{Kt} \cdot K T_A^0 + \int e^{Kt} K A \sin(wt)\, dt$$

$$= \cancel{e^{Kt}}\, T_A^0 + AK\cancel{e^{Kt}}\left(\frac{K\sin(wt) - w\cos(wt)}{K^2+w^2}\right) + \frac{C}{e^{Kt}}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_A^0 + AK\left(\frac{K\sin(wt) - w\cos(wt)}{K^2+w^2}\right) + Ce^{-Kt}$$

$$T_0 = T(0) = T_A^0 + (-AK)\frac{w}{K^2+w^2} + C$$

$$\Rightarrow C = T_0 - T_A^0 + \frac{AKw}{K^2+w^2}$$

$$T(t) = T_A^0 + \frac{AK}{K^2+w^2}\left(K\sin(wt) - w\cos(wt) + w e^{-Kt}\right) + e^{-Kt}\left(T_0 - T_A^0\right)$$