**P1.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de tipo Riccati:

*a)* $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$
**Indicación:** Busque una solución es $y_1(x) = Cx$

*b)* $y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2, y(1) = 3.$
**Indicación:** Busque una solución es $y_1(x) = \frac{C}{x}$

a) $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ c.v

evaluando

$$c + c^2x^3 - (2x^2+1)Cx + x^3 + x - 1 = 0$$

$$\boxed{C=1}$$

evaluando C=1 ¿$1 + x^3 - \underbrace{(2x^2+1)x}_{-2x^3 - x} + x^3 + x - 1 = 0$?

$\Rightarrow$ $y_1(x) = x$ es solución

$$y(x) = x + \frac{1}{z(x)} \Rightarrow y'(x) = 1 - \frac{z'(x)}{z(x)^2}$$

) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{z'(x)}{z^2(x)} + x\underbrace{\left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2}_{x^2 + \frac{2x}{z(x)} + \frac{1}{z(x)^2}} - (2x^2+1)\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) + x^3 + x - \cancel{1} = 0$$

$$-\frac{z'(x)}{z^2(x)} + x^3 + \frac{2x^2}{z(x)} + \frac{x}{z(x)^2} - 2x^3 - \frac{2x^2}{z(x)} - x - \frac{1}{z(x)} + x^3 + x$$

$$-\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{x}{z(x)^2} - \frac{1}{z(x)} = 0 \qquad / \, z(x)^2$$

$$\Rightarrow -z'(x) + x - z(x) = 0$$

$$\Rightarrow z'(x) + 1z(x) = x \quad / e^{\int 1 ds}\Big|^{x} = e^{x}$$

$$e^{x} z'(x) + e^{x} z(x) = e^{x} x$$

$$\left(e^{x} z(x)\right)' = e^{x} x \quad / \int dx$$

$$e^{x} z(x) = (x-1)e^{x} + C$$

$$z(x) = (x-1) + Ce^{-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x + \frac{1}{(x-1) + Ce^{-x}}}$$

Dominio $\{x \in \mathbb{R} : (x-1) + Ce^{-x} \neq 0\}$

b) $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2, y(1) = 3.$

**Indicación:** Busque una solución es $y_1(x) = \dfrac{C}{x}$

$$y' = -\frac{C}{x^2}$$

$$-\cancel{\frac{C}{x^2}} = -\frac{4}{x^2} - \cancel{\frac{C}{x^2}} + \frac{C^2}{x^2} \Rightarrow C^2 = 4 \begin{cases} C = 2 \\ C = -2 \end{cases}$$

$$y_1(x) = \frac{2}{x}$$

c.v

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{z(x)}$$

$$y'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{z'(x)}{z(x)^2} \qquad \frac{2}{x z(x)}$$

$$-\cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{z'(x)}{z(x)^2} = -\cancel{\frac{4}{x^2}} - \cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{1}{\dots} + \cancel{\frac{4}{x^2}} + \frac{4}{\dots} + \frac{1}{\dots^2}$$

$$-\cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{z'(x)}{z(x)^2} = -\cancel{\frac{4}{x^2}} - \cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{1}{x\,z(x)} + \cancel{\frac{4}{x^2}} + \frac{4}{x\,z(x)} + \frac{1}{z(x)^2}$$

$$-z'(x) - \frac{3z(x)}{x} - 1 = 0 \qquad / \cdot(-1)$$

$$z'(x) + \frac{3}{x}z(x) = -1 \qquad / x^3$$

$$x^3 z'(x) + 3x^2 z(x) = -x^3$$

$$\left(x^3 z(x)\right)' = -x^3 \qquad / \int dx$$

$$x^3 z(x) = \frac{-x^4}{4} + D = \frac{D - x^4}{4}$$

$$z(x) = \frac{D - x^4}{4x^3}$$

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{4x^3}{D - x^4}$$

$$\cancel{3}_{1} = y(1) = \cancel{2} + \frac{4}{D-1}$$

$$\Rightarrow D - 1 = 4 \Rightarrow D = 5$$

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{4x^3}{5 - x^4}$$

Dominio $\left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ y} \\ x \neq \pm\sqrt[4]{5} \end{array} \right.$

**P2.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de tipo Bernoulli:

a) $xy^2y' - y^3 = xy^8$ b) $3y' + \frac{ty^4}{e^{t^2}} = 2ty$

$\to$ $y\neq 0$ $y \neq 0$ $\boxed{\text{Pues } y=0 \text{ es sol}}$

a) $y' - \frac{y}{x} = y^6 \,/\, y^{-6}$ Bernoulli $\alpha = 6$

$x \neq 0$

$z(x) = y^{-\alpha} = y^{-5}$

$z'(x) = -5\, y^{-6} y'$

$\frac{1}{(-5)}(-5)\frac{y'}{y^6} - \frac{y^{-5}}{x} = 1$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right) z' - \frac{z}{x} = 1 \quad / (-5)$

$z' + \frac{5}{x} z = -5 \quad / \cdot e^{\int \frac{5}{x} dx}$

$e^{5\ln(x)} = \boxed{x^5}$

$\underbrace{x^5 z' + 5x^4 z}_{(x^5 z)'} = -5x^5$

$= -5x^5 \quad / \int dx$

$x^5 z = \frac{(-5)}{6} x^6 + C$

$z^{-\frac{1}{5}} = y$

$z = y^{-5}$

$z = \left(-\frac{5}{6}\right) x + Cx^{-5}$

$y = \left(\frac{-\frac{5}{6}x^6 + C}{x^5}\right)^{-\frac{1}{5}}$

$$\hat{y} = \left( \frac{x^5}{C - \frac{5}{6}x^6} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\boxed{D : \{ x \in \mathbb{R} : \quad C - \tfrac{5}{6}x^6 \neq 0 \} \quad x \neq 0}$$

Para $D$ la solución es $\hat{y}$

e $y \equiv 0$ es sol $\forall x \in \mathbb{R}$

$y \equiv 0$ es sol

b) $3y' + \frac{ty^4}{e^{t^2}} = 2ty$ $\quad / \cdot y^{-4} \quad \alpha = 4 \qquad$ c.v $\; y^{-3} = z$

$(-1)/(-3) \quad \frac{y'}{y^4} + t e^{-t^2} = \frac{2t}{y^3} \qquad (-3)\frac{y'}{y^4} = z'$

$$-z' + t e^{-t^2} = 2tz \Rightarrow z' + 2tz = t e^{-t^2} \quad / \cdot e^{t^2}$$

$$e^{t^2} z' + 2t e^{t^2} z = t \qquad / \int dt$$

$$e^{t^2} z = \frac{t^2}{2} + D = \frac{t^2 + \bar{D}}{2}$$

$$z = \frac{t^2 + \bar{D}}{2e^{t^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2e^{t^2}}{t^2 + \bar{D}}} \qquad t \neq \pm\sqrt{|\bar{D}|}$$

Sol. cuando $\bar{D} \leq 0$

**P4.** . Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t^4}{tx}$$

a) Sin calcular la solución analíticamente, demuestre que hay una única solución tal que $x(1) = -1$. $t=1$ $x=-1$

b) Muestre que esta ecuación es de Bernoulli y resuélvala. Encuentre la solución particular tal que $x(1) = -1$.

c) ¿Cuál es el intervalo de existencia de la solución que pasa por $(2, 1)$ como solución de la ecuación?

d) Halle dos soluciones que pasen por el punto $(0, 0)$ ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

a) $x' = f(t,x) = \dfrac{x^2+t^4}{tx}$

¿Es continua cerca de $t=1$ y $x=-1$?

Si porque $t \neq 0$ y $x \neq 0$

Probar que es lipschitz en la segunda variable

Vamos a probar que entorno a $(1,-1)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es acotada

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(xt) - (x^2+t^4)t}{x^2t^2} = \frac{x^2-t^4}{x^2t}$$

¿Es continua? Si porque $x \neq 0$ y $t \neq 0$

Es continua nos damos una bolita cerca de $(1,-1) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ Tiene min y max $\Rightarrow$ Acotada

$\boxed{\delta = \frac{1}{2}}$ $\delta$ Que no llegue al $(0,0)$

Teo Local

$\Rightarrow$ Solo existe 1 solución que pase por

$x(1) = -1$ ✓

6) $$x' = \frac{x}{t} + t^3 x^{-1} / 2x$$

Bernoulli $\alpha = -1$

$z = x^{1-\alpha}$

$z = x^2$

$z' = 2xx'$

$$2xx' = 2\frac{x^2}{t} + 2t^3$$

$$z' = \frac{2}{t} z + 2t^3$$

$$z' - \frac{2}{t} z = 2t^3 \qquad / e^{\int -\frac{2}{t} dt}$$

$e^{-2\ln(t)} = t^{-2}$

$$t^{-2} z' - \frac{2}{t^3} z = 2t$$

$$(t^{-2} z)' = 2t \qquad / \int dt$$

$$t^{-2} z = t^2 + C$$

$$z = t^4 + Ct^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{t^4 + Ct^2}}$$

$$-1 = x(1) = -\sqrt{1 + C}$$

$$\Rightarrow -1 = -\sqrt{1+C} \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{t^4} \Rightarrow \boxed{x = -t^2}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\sqrt{t^4} \Rightarrow \boxed{x = -t^2}$$

c) $\quad X = \pm\sqrt{t^4 + Ct^2}$

$$1 = X(2) = +\sqrt{16 + 4C} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{15}{4}}$$

$x(2)=1$ es

$$\Rightarrow X(t) = +\sqrt{t^4 - \frac{15}{4}t^2} = +|t|\sqrt{t^2 - \frac{15}{4}}$$

$$t^2 \geq \frac{15}{4} \Rightarrow t^2 - \frac{15}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow t > \frac{\sqrt{15}}{2} \quad o \quad t < -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(-\infty, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right] \quad o \quad \underbrace{\left[\frac{\sqrt{15}}{2}, \infty\right)}$$

contiene a 2

La solución $\quad X(t) = |t|\sqrt{t^2 - \frac{15}{4}}$ es la que

con $t \in \left[\frac{\sqrt{15}}{2}, \infty\right)$ $\quad x(2) = 1$

D) La fórmula vale $\forall c \in \mathbb{R}$ para $\sqrt{t^4 + ct^2} = 0$ si $t = 0$

Usando $C = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) = \pm t^2$

Obs: - Continuidad respecto a $t$ en $0$, no hay
- Lipitz respecto a $x$ en torno a $0$, tampoco

**P3.** Casos reducibles:

*a*) Resuelva la ecuación $y' = xy'' - 1$

*b*) Encuentre una solución implícita para: $\frac{y''}{y'} = y + 1$

a) $\left.\begin{array}{l} y' = z \\ y'' = z' \end{array}\right\} \Rightarrow z = xz' - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = z' - \frac{z}{x} \quad / e^{-\int \frac{1}{s} ds} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x^2} = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = \left(\frac{z}{x}\right)'$

$\Rightarrow \frac{z}{x} = -\frac{1}{x} + D \quad / \cdot x$

$y' = z = -1 + Dx \quad / \int dx$

$\boxed{y = -x + \bar{D}x^2 + C}$ Dominio $\mathbb{R}$

$y' = -1 + 2\bar{D}x \, , \, y'' = 2\bar{D}$

$\underbrace{-1 + 2\bar{D}x}_{y'} = \underbrace{2\bar{D}}_{y'' \cdot x} x - 1$ ✓

*b*) Encuentre una solución implícita para: $\frac{y''}{y'} = y + 1$

$y' = z$

$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{dx} = y' = z$

$= \frac{dz}{dy} z$

$\frac{dz}{dy} = y + 1$

v.s $\Rightarrow z = \frac{(y+1)^2}{2} + C = \frac{(y+1)^2 + \bar{C}}{2}$

$$y' = \frac{(y+1)^2 + \bar{C}}{2} \quad / \text{ v.s}$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{(y+1)^2 + \bar{C}}} = \frac{x}{2} + D \qquad // \int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\mathrm{Arth}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{a}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{Artan}\left(\frac{y+1}{\sqrt{|\bar{C}|}}\right)}{\sqrt{|\bar{C}|}} = \frac{x}{2} + D}$$

$$y = \tan\left(\sqrt{|\bar{C}|}\left(\frac{x}{2} + D\right)\right) - 1$$

**Prop1** Encuentre una función $y(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$ que cumpla con la EDO:

$$y' = xyH(x), \forall x \neq 0$$

En donde $H(x)$ es la función Escalón de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & = \text{si } x > 0 \\ 0 & = \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} xy & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$y' - xy = 0 \quad / e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y' - x e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0 \quad / \int dx$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = K \quad / e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = K e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \begin{cases} K_1 e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si: } x > 0 \\ K_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $y$ continua en $\mathbb{R}$ (en particular en $x=0$)

$$y = \begin{cases} K e^{\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ K & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**Prop2** Encuentre dos soluciones distintas del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' &= \overbrace{t^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}^{f(t,x)} \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

¿Esto contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

$f(\cdot,x)$ es continua. ✓

$f(t,\cdot)$ no es Lipschitz

$\sim x^{\frac{1}{3}}$

$x^{\alpha}$ con $\alpha < 1$

No son lipschitz en 0

N.5

$$\int (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \int t^{\frac{1}{3}}\,dt$$

$$\frac{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C$$

evaluando $x=1$ y $t=0$ $\Rightarrow$ $0 = C$ $\Rightarrow$ $C=0$

$$(x-1)^{\frac{2}{3}} = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{2} \qquad /(\ )^{3}$$

$$(x-1)^{2} = \frac{t^{4}}{2} \qquad /\pm\sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 1 \pm \frac{t^{2}}{\sqrt{2}}}$$

No porque $f(t,x)$ no es lipschitz respecto a $x$ en torno a 1 pues $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ explota

$f(x,y)$

**Prop3** Considere el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' &= \underbrace{\dfrac{(y^4+1)^{\frac{1}{5}}}{x^2+1}}_{} \\ \mathrm{y}(1) &= 0 \end{cases}$$

Demuestre que existe una única solución definida para todo $x \in \mathbb{R}$

Respecto a $x$ es continua en todo $\mathbb{R}$
pues son polinomios y $x^2+1 > 0$ ✓

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{1}{5}\right) \frac{1}{(x^2+1)\,(y^4+1)^{4/5}} \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1)(y^4+1)} \leq \boxed{\frac{1}{5}}$$

Por TVM $\quad |f(x,y) - f(x,z)| = \left|\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_x)}\right| |y - z|$

$$\leq \left(\frac{1}{5}\right) |y - z| \leq |y - z|$$

$\Rightarrow$ $f$ es Lipschitz respecto a $y$
$\Rightarrow$ TEU para el (P) de Cauchy

Tiene solución y es única