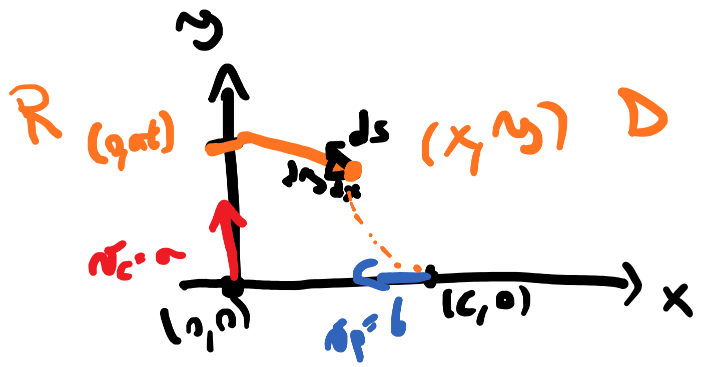
Auxiliar 3

P1. **[Curva de persecución]** Un conejo parte del origen y corre por el eje $y > 0$ a velocidad a.
Al mismo tiempo parte un perro, que corre a velocidad b, del punto $(c, 0)$ persiguiendo al conejo. Queremos encontrar la trayectoria que sigue el perro. En el instante $t = 0$ el conejo parte del $(0, 0)$ y el perro del $(c, 0)$.
En el instante t el conejo estará en el punto $(0, at)$ y el perro en el punto D (x, y). El segmento RD es tangente a la trayectoria (en todo momento el perro corre en dirección al conejo), luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \to xy' - y = -at$$

Plantee una ecuación de segundo orden para las variables x e y eliminado t y resuelvala.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-at}{x}$$

$$\Rightarrow xy' - y = -at \quad (1)$$

Usando (1) $\Rightarrow$ $\cancel{y'} + xy'' - \cancel{y'} = -a\frac{dt}{dx}$

¿ $\frac{dx}{dt}$? Denotando por s la curva que sigue el perro $\frac{ds}{dt} = b$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = -\frac{b}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$xy'' = \frac{a}{b}\sqrt{1+y'^2}$$

/ No tiene y
c.v $\Rightarrow$ $p = y'$
$p' = y''$

$$x\,p' = \frac{a}{b}\sqrt{1+p^2}$$

$$p(c) = y'(c) = 0$$

$$y(c) = 0$$

$$\frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{b x} \qquad \Big/ \int_c^x dx$$

$$\int_{\cancel{p(c)}\,\to 0}^{p} \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{b}\ln(x) - \frac{a}{b}\ln(c)$$

$$\operatorname{ArgSinh}(p) = \frac{a}{b}\ln\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$y' = p = \sinh\left(\frac{a}{b}\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right) \qquad \Big/ \int_c^x dx$$

$$y(x) - \cancel{y(c)}\,\to 0 = \int_c^x \sinh\left(\frac{a}{b}\left(\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right)\right) dx$$

P2. Considere el problema de Cauchy

$$(*)\begin{cases} y' &= \dfrac{\cos(y)}{1+y^4} \\ y(0) &= \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Demuestre que existe una constante positiva K tal que

$$\left|\frac{\cos(r)}{1+r^4} - \frac{\cos(s)}{1+s^4}\right| \le K|r-s| \qquad \forall r, s \in R$$

b) Encuentre una solución definida en todo R del problema de Cauchy y use la parte anterior para demostrar que esa es la única solución al problema $(*)$.

a) $y' = f(t,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sin(y)}{1+y^4} + \frac{\cos(y)}{(1+y^4)^2}(-1)(4y^3)$$

$$\left|\frac{1}{1+y^4}\right| \le 1 \quad ✓ \qquad \left|\frac{-4y^3}{(1+y^4)^2}\right| \le 4$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 5 \Rightarrow \text{Por TVM}$$

$$\left|\frac{\cos(r)}{1+r^4} - \frac{\cos(s)}{1+s^4}\right| \le 5|r-s|$$

b) Tomando $y \equiv \frac{\pi}{2} \Rightarrow y' = 0$, $\cos(y) = 0$

$\Rightarrow$ Satisface la EDO $\boxed{y \equiv \frac{\pi}{2}}$ es sol $\forall x \in R$

Claramente es continua respecto t

$\Rightarrow$ TEU que Existe una única solución tal que

$y(0)=\frac{\pi}{2}$ $\quad y$ es $\quad \boxed{y=\frac{\pi}{2}}$

P3. Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{\sqrt{1+y}}{1+x^2} \\ \text{y(a)} &= \text{b} \end{cases}$$

a) Encuentre todos los valores $a, b \in R$ para los cuales el problema no tiene solución

b) Encuentre todos los valores $a, b \in R$ para los cuales el problema tiene solución única y determínela.

c) Encuentre todos los valores $a, b \in R$ para los cuales el problema tiene más de una solución y determínelas.

P4. Determine la existencia y unicidad de las soluciones para las siguientes EDOs:

a) $1 + y < 0 \Rightarrow -1 > y$

Para $b < -1$ $\Rightarrow$ No hay solución

$a \in R$

b)

$1 + y \leq 0 \Rightarrow y \leq -1$ casos sin TEU

$\Rightarrow$ $a \in R$, $b > -1$ Se puede usar TEU

usar TEU local $[\frac{b-1}{2}, \infty)$

$$y' = \frac{\sqrt{1+y}}{1+x^2} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y}} = \frac{1}{1+x^2} \quad \int dx$$

$$\frac{\sqrt{1+y}}{2} = \text{Arctan}(x) + C$$

$$\frac{\sqrt{1+b}}{2} = \text{Arctan}(a) + C \Rightarrow C = \frac{\sqrt{1+b}}{2} - \text{Arctan}(a)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y}}{2} = \left(\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(a)\right) + \frac{\sqrt{1+b}}{2}$$

$$\boxed{y = \left(2\left(\operatorname{ArcTan}(x) - \operatorname{ArcTan}(a)\right) + \sqrt{1+b}\right)^2 - 1}$$

c) $a \in \mathbb{R}$ y $b = -1$

$y = -1$ ✓ cumple Todo

$$\boxed{y = \left(2\left(\operatorname{ArcTan}(x) - \operatorname{ArcTan}(a)\right)\right)^2 - 1}$$

P4. Determine la existencia y unicidad de las soluciones para las siguientes EDOs:

a) $y' = xy\sin(y)$, $y(0) = 2$ para $x \in R$.
b) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ en el rectángulo $|x| \leq 1$, $|y| < 1$. ¿Y si se omite estas restricciones?
c) $\cos(x)y'\sin(x)y = 3x\cos(x)$, $y(2\pi) = 0$.
d) $y' = \sqrt{y} + 1$, $y(0) = 0$ para $x \in [0, 1]$.
e) $y' = y^{\frac{1}{3}}$, $y(1) = 0$. ¿Y si $y(1) = 1$?

continuidad para x ✓ polinomio

a) $\dot{y} = f(x,y)$

Lipschitz para y

$|f(x,y) - f(x,z)| = |x| |(y\sin(y) - z\sin(z))|$ ✗

TVM $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(y) + \cos(y)\, y$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq |y+1|$

Si y Acotado $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ Acotado

TEU Local

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow$ En el Rectángulo

$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < 2$

Se Tiene solución única, si quitamos la restricción no

x^2 No es Lipschitz

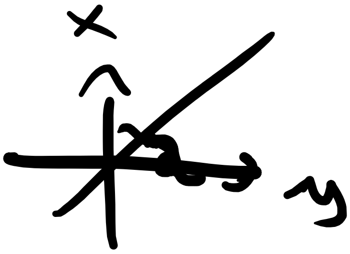
c) $0 = 3 \cdot 2\pi \cdot 1$ ✗ No puede haber solución

d) Hay solución pero no única pues $\sqrt{xy}$ en $y=0$ no es Lipschitz

e) Hay solución pero no única

Con el cambio es única

en la vecindad



Prop1 Casos especiales:

a) Encuentre una solución implícita para: $\frac{y''}{y'^2+1} = y$, con $y(0) = \sqrt{2}$ e $y'(0) = 0$.

b) Resuelva $y(x)y''(x)y'(x) + (y'(x))^3 = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

a) $y' = p$

$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p$

$\Rightarrow \quad \frac{2p'p}{2(1+p^2)} = y \qquad / \text{v.s}$

$\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \frac{y^2}{2} + c \qquad / x=0$

$\frac{1}{2}\ln(1+0^2) = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} + c$

$0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$

$\cancel{\frac{1}{2}}\ln(1+p^2) = \frac{y^2-2}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow 1 + p^2 = e^{y^2-2}$

$y' = p = \pm\sqrt{e^{y^2-2} - 1}$

$\pm\int_{\sqrt{2}}^{y} \frac{dy}{\sqrt{e^{y^2-2} - 1}} = \int_0^x 1\,dx = x$

b) $y y'' y' + (y')^3 = 0 \qquad / \text{c.v } p = y'$

b) $y\, y''\, y' + (y')^3 = 0$ / c.v $p = y'$

$\frac{dp}{dy}\, p = y''$

$y \frac{dp}{dy} p^2 + p^3 = 0$

$\Rightarrow \quad y \frac{dp}{dy} = -p$

$\ln(|p|) = -\ln(|y|)$

$|p| = \frac{1}{|y|}$, como $p \neq 0$ es decir $p > 0$ $(p(0) = 1)$

$p = \frac{1}{|y|}$ como $y \neq 0$ e $y(0) = 1 \Rightarrow y > 0$

$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{y} \Rightarrow y y' = 1$ / v.s

$\int_1^y y\, dy = \int_0^x 1\, dx$

$\frac{y^2}{2} - \frac{1^2}{2} = x \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{2x+1}}$ $\quad y(0) = 1$ ✓

$y' = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$ ✓