MA2601-6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 16 de abril de 2021

Auxiliar 2

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de tipo Riccati:

a) $y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0$
Indicación: Busque una solución es $y_1(x) = Cx$

b) $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2, y(1) = 3.$
Indicación: Busque una solución es $y_1(x) = \dfrac{C}{x}$

P2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de tipo Bernoulli:

a) $xy^2y' - y^3 = xy^8$

b) $3y' + \dfrac{ty^4}{e^{t^2}} = 2ty$

P3. Casos reducibles:

a) Resuelva la ecuación $y' = xy'' - 1$

b) Encuentre una solución implícita para: $\dfrac{y''}{y'} = y + 1$

P4. . Considere la siguiente ecuación diferencial de primer orden en forma diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + t^4}{tx}$$

a) Sin calcular la solución analíticamente, demuestre que hay una única solución tal que $x(1) = -1$.

b) Muestre que esta ecuación es de Bernoulli y resuélvala. Encuentre la solución particular tal que $x(1) = -1$.

c) ¿Cuál es el intervalo de existencia de la solución que pasa por $(2, 1)$ como solución de la ecuación?

d) Halle dos soluciones que pasen por el punto $(0, 0)$ ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

Propuestos

Prop1 Encuentre una función $y(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$ que cumpla con la EDO:

$$y' = xyH(x), \forall x \neq 0$$

En donde $H(x)$ es la función Escalón de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & = \text{si } x > 0 \\ 0 & = \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Prop2 Encuentre dos soluciones distintas del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' & = \mathrm{t}^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} \\ \mathrm{x}(0) & = 1 \end{cases}$$

¿Esto contradice el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones?

Prop3 Considere el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' & = \dfrac{(y^4+1)^{\frac{1}{5}}}{x^2+1} \\ \mathrm{y}(1) & =0 \end{cases}$$

Demuestre que existe una única solución definida para todo $x \in \mathbb{R}$

Resumen de contenidos

Ecuaciones de primer orden: $y' + p(x)y = q(x)$, multiplicar la ecuación por $e^{\int p(s)ds}$ y se tendrá una ecuación sencilla en caso de poder integrar el lado derecho. En caso de tener una condición inicial se puede evitar las contantes al momento de integrar, encontrado una solución sin incógnitas.

Ecuaciones Riccati: $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$, si se conoce una solución $y_1(x)$ hacer el cambio $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{z(x)}$. Este cambio conduce a una EDO lineal

Ecuaciones Bernoulli: $y' = R(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dividir todo por y^{α} y hacer el cambio $z = y^{1-\alpha}$. Este cambio conduce a una EDO lineal

Ecuaciones sin termino independiente: $F(y'', y', x) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $z'(x) = y''(x)$

Ecuaciones sin termino dependiente: $F(y'', y', y) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $\dfrac{dz}{dy}(x)z(x) = y''(x)$

Definición: Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz de constante $L > 0$ si:

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Teorema (de Existencia y Unicidad Global o Picard-Lindelöf). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times R \to R$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy.

$$(PC)\begin{cases} y' & = f(\mathrm{t,y}) \\ \mathrm{y(x_0)} & = \mathrm{y_0} \end{cases}$$

Obs: Existe la versión local, al probarlo para una vecindad de (x_0, y_0)

Teorema (del Valor Medio). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Obs: Se puede usar para probar Lipschitz, en caso de poder acotar la derivada.