EDO: Capítulo 3

- Operador diferencial:

$$D^K = \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{K \text{ veces}} = \frac{d^K}{dx^K}$$

se aplica sobre funciones de clase C^n, es lineal

→ Operador diferencial a coef variables

$$P(x,D) = \sum_{K=0}^{n} a_K x D^K$$

$$= a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

→ Operador diferencial a coef ctes

$$P(D) = \sum_{K=0}^{n} a_K D^K = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

→ Propiedades:

- $(P_1+P_2)(f) = P_1(f) + P_2(f)$
- $(\lambda P_1)(f) = \lambda P_1(f)$

* Forman un e.v

- $P_1 P_2 = P_1 \circ P_2$
- $(P_1+P_2)Q = P_1 Q + P_2 Q$
- $Q(P_1+P_2) = QP_1 + QP_2$

Forman un anillo

unidad → I

* Cuando es a coef ctes conmuta

EDO Lineal orden n	Homogénea (Subespacio $\mathbb{H}$ de soluciones homogéneas)	no Homogénea (hiperplano S de soluciones particulares)
Coef ctes	$P(D)y = 0$ • polinomio característico • valores característicos	$P(D)y = \overline{Q}$ • coef. indeterminados • variación de parámetros
Coef variables	$P(x,D)y = 0$ • Fórmula de Abel • Fórmula de Liouville	$P(x,D)y = \overline{Q}$ • representación de Green • variación de parámetros

• polinomio característico.

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \lambda^k$$

donde sus raíces se llaman valores característicos de la EDO.

• [Definición] y es solución de la EDO lineal

$P(x,D)y = \bar{Q}$ en el intervalo I si $y \in C^n(I)$ y

$P(x,D)y(x) = \bar{Q}(x) \quad \forall x \in I$.

* n condiciones iniciales

• [Definición] El problema de Cauchy para EDO lineales de orden n consiste en encontrar $y \in C^n(I)$ tq.

$$(PC) \begin{cases} P(x,D)y(x) = \bar{Q}(x) \quad \forall x \in I \\ (y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) = (y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n-1)}) \end{cases}$$

• Teorema Existencia y Unicidad:

Supongamos que las funciones $\bar{a}_k(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$ y $\bar{Q}(x)$ son continuas en el intervalo I, entonces $\forall x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el (PC) tiene una única solución

* Si la EDO lineal es homogénea y con cond. iniciales nulas, la única sol es la solución nula

• EDO de orden 2

$$y'' + \bar{a}_1 y' + \bar{a}_0 y = \bar{Q}$$

En notación de operadores:

$$\boxed{P(D)y = D^2 y + \bar{a}_1 Dy + \bar{a}_0 y = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = \bar{Q}}$$

donde λ_1, λ_2 son las raíces del polinomio característico

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 + \bar{a}_1 \lambda + \bar{a}_0}$$

Liouville

$$y'' + P(x)y' + y = Q(x)$$

y_1 conocido

$$y_2 = C y_1 \int \frac{\exp(-\int p(x))}{y_1^2} dt.$$

→ Solución homogénea

1. λ_1, λ_2 reales distintos

$$y_h(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$,

$$y_h(x) = Ae^{\lambda x} + xBe^{\lambda x}$$

3. λ_1, λ_2 complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \theta \pm i\omega$ $\omega \neq 0$.

$$y_h = e^{\theta x}\left(A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)\right)$$

→ Condiciones de borde:

- Una EDO de 2° orden tiene una única solución si especificamos el valor de la función y su derivada en un punto. Sea,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Queremos saber para qué valores de λ se tiene sol y cuántas.

1. $\lambda = 0$, $y(x) = Ax + B$ y aplicando condiciones

$$\Rightarrow y \equiv 0$$

2. $\lambda = -\omega^2 < 0$, $y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$.

$$\Rightarrow y \equiv 0$$

3. $\lambda = \omega^2 > 0$, $y(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x) + B\cos(\omega x)$

$$\Rightarrow y(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x)$$

→ Solución particular

- Wronskiano:

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{\bar{Q} y_2}{W(y_1,y_2)}\,dx + y_2 \int \frac{\bar{Q} y_1}{W(y_1,y_2)}\,dx.$$

- <u>Estudio completo de la EDO lineal de orden n</u>

→ Estructura geométrica de la solución: espacios H y S

- $\boxed{\mathcal{H} = \{ y \in C^n(I) : y^{(n)}(x) + \dots + \bar{a}_1(x) y'(x) + \bar{a}_0 y(x) = 0 \ \forall x \in I \}}$

  - cjto de todas las soluciones de la ec. homogénea.
  - $\mathcal{H}$ es s.e.v de $C^n(I)$ de dimensión n

- $\boxed{S = \{ y \in C^n(I) : y^{(n)}(x) + \dots + \bar{a}_1(x) y' + \bar{a}_0(x) y = \bar{Q} \text{ en } I \}}$

  - cjto de todas las soluciones de la ec. lineal de orden n no homogénea

- Sea X un e.v, A s.e.v de X y $x \in X$. Definimos un hiperplano o espacio afín

$$\boxed{x + A = \{ z \in X : z = x + a, \ a \in A \}}$$

- [Teorema] $y_p \in S$ es sol de la EDO no homogénea,

$$S = y_p + H$$

  * S es un hiperplano que se obtiene al desplazar y_0 por el subespacio $\mathcal{H}$
  * todo elemento de S se escribe

$$\boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p}$$