Auxiliar 11

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere la función $f(x) = \frac{x}{\ell^2}(\ell - x)$ definida en el intervalo $[0, \ell]$. Calcule los coeficiente de la expansión de Fourier para la función $f(x)$ en los casos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{n\pi x}{\ell}\right); \tag{1a}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right). \tag{1b}$$

P2. Una barra metálica de largo ℓ es puesta en el vacío con una distribución de temperatura inicial dada por $T(x, t = 0) = T_0 \frac{x}{\ell}(1 - \frac{x}{\ell})$, $T_0 \in \mathbb{R}$. Encuentre el campo de temperatura $T(x, t)$ si dicho campo satisface la ecuación de difusión (2) con condiciones de borde tipo Neumann, y coeficiente de difusividad térmica κ.

$$\partial_t u(x, t) = \kappa \partial_x^2 u(x, t) \tag{2}$$

P3. Considere una cuerda de largo ℓ que tiene un extremo fijo y otro libre. Suponga que la cuerda se suelta justo después dejarla preparada en la forma $u(x, t = 0) = d_0 \frac{x}{\ell}(1 - \frac{x}{\ell})$, $d_0 \in \mathbb{R}$. Determine el campo desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda, si dicho campo satisface la ecuación de ondas lineal 1D (3) con velocidad de propagación c.

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \tag{3}$$