Auxiliar 8

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Encuentre la serie de Laurent y sus radios de convergencia para las siguientes funciones complejas

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}, \quad z_0 = 0; \tag{1a}$$

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = i; \tag{1b}$$

$$f(z) = z^2 \sin\left(\tfrac{1}{z}\right) \quad z_0 = \infty. \tag{1c}$$

Solución:

Como se debe cacular la serie de Laurent en torno al punto $z_0 = 0$, la serie solamente debe contener términos z^n, en dónde $n \in \mathbb{Z}$. En cuanto a la primera función es importante notar que reagrupando los términos, se puede expresar como

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{1+z^2}\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z^2}. \tag{2}$$

En el último término se puede aplicar la serie geométrica con $z \to -z^2$, en dicho caso se obtiene

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \tag{3}$$

en dónde $\left|-z^2\right| < 1 \Rightarrow |z| < 1$, y por lo tanto el radio de convergencia es $R = 1$, y la serie de Laurent de $f(z)$ se expresa como

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}. \tag{4}$$

En el segundo caso se requiere la serie de Laurent centrada en el punto $z = i$, por lo tanto esta debe contener solamente términos del tipo $(z-i)^n$, en dónde $n \in \mathbb{Z}$. Para la segunda función $f(z)$, se puede aplicar la técnica de fracciones parciales, por lo cual la función $f(z)$ se expresa como

$$f(z) = \frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right]. \tag{5}$$

De allí es muy importante notar que

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}. \tag{6}$$

Usando nuevamente la serie geométrica, esta vez con $z \to -(z-i)/2i$, se obtiene

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^n (z-i)^n\,, \tag{7}$$

en dónde $|-(z-i)/2i| < 1 \Rightarrow |z-i| < 2$, por lo tanto el radio de convergencia es $R = 2$. Reemplazando en la Ec.(5), se deduce que la serie de Laurent de la función $f(z)$ está dada por

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^n (z-i)^n\right]. \tag{8}$$

En el tercer caso, como se requiere la serie de Laurent centrada en $z_0 = \infty$, esta deberá contener solo términos del tipo $1/z^n$, en dónde $n \in \mathbb{Z}$. Es muy útil recordar que para todo $z \in \mathbb{C}$, con $z_0 = 0$, se cumple

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{9}$$

Entonces para la función $f(z)$ en la serie anterior se debe hacer el cambio $z \to 1/z$, y por lo tanto es válido que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-1}} = z - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}\frac{1}{z^{2n+1}}, \tag{10}$$

cuyo radio de convergencia es $R = \infty$.

P2. Encuentre la serie de Laurent en torno a $z_0 = 0$ para la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} \tag{11}$$

para las regiones

(a) $A_1 : 0 < |z| < 1$

(b) $A_2 : 1 < |z| < \infty$

Solución:

Para A_1 es importante notar la descomposición de la función $f(z)$, y luego aplicar directamente la serie geométrica, de dónde se obtiene

$$f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}. \tag{12}$$

Para A_2 se nota una descomposición distinta para luego usar la serie geométrica con $z \to 1/z$, y entonces es cierto que

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}. \tag{13}$$

P3. Calcule la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx. \tag{14}$$

Solución:

Se considera la función compleja

$$h(z) = \frac{z^2}{z^4+1}. \tag{15}$$

Los polos de $h(z)$ se encuentran cuando se resuelve la ecuación $z^4+1=0$, y se obtiene que el conjunto de los polos es $z_* = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}\}$, cada uno de orden 1. Se utiliza el contorno dado por la Fig. 1, y se observa que solo están contenidos en el interior de Γ los puntos $\{z_1, z_2\} = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$. Si se descompone la curva señala en la Fig. 1 como $\Gamma = C_1 \cup C_2$,

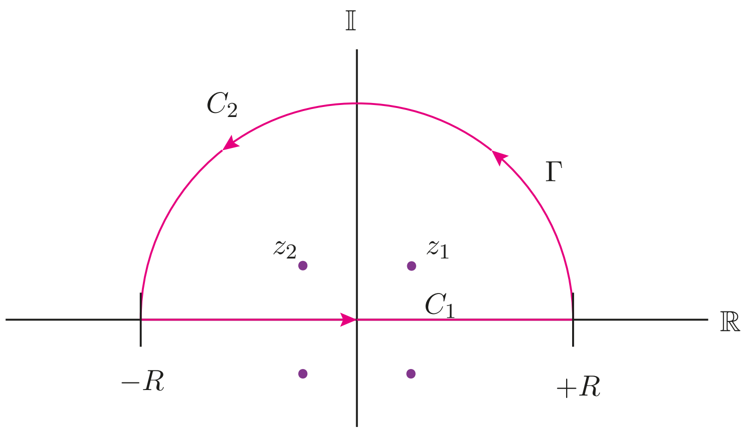

Figure 1: Contorno en el plano complejo para problema 3

se obtiene

$$\oint_\Gamma h(z)dz = \int_{C1} h(z)dz + \int_{C_2} h(z)dz. \tag{16}$$

La parte izquierda se calcula usando el teorema de los residuos, y entonces se obtiene

$$\oint_\Gamma h(z)dz = 2\pi i[\text{Res}(h, e^{i\pi/4}) + \text{Res}(h, e^{i3\pi/4})] \tag{17}$$

Considerando que

$$\operatorname{Res}(h, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}; \tag{18a}$$

$$\operatorname{Res}(h, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{i-1}{4\sqrt{2}}. \tag{18b}$$

Se obtiene

$$\oint_{\Gamma} h(z)dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{19}$$

Para la curva C_1 la parametrización está dada por $z = x$, entonces $dz = dx$ y además $x \in [-R, R]$, por lo tanto

$$\int_{C_1} h(z)dz = \int_{-R}^{+R} \frac{x^2}{x^4+1}dx. \tag{20}$$

Para la curva C_2 la parametrización está dada por $z = Re^{i\theta}$, entonces $dz = iRe^{i\theta}d\theta$, y además $\theta \in [0, \pi]$, por lo tanto

$$\int_{C_2} h(z)dz = \int_{0}^{\pi} \frac{iR^3e^{i3\theta}d\theta}{R^4e^{i4\theta}+1}. \tag{21}$$

Se observa que la última integral tiende a 0 cuando $R \to 0$. Aplicando límite a la Ec. (16), se obtiene entonces

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx \tag{22}$$

Usando la paridad de la función $h(x)$ se obtiene finalmente lo pedido, es decir

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \tag{23}$$