Auxiliar 4

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que en coordenadas cilíndricas está dado por la expresión

$$\mathbf{F}(r, \phi, z) = zr\hat{\mathbf{r}} + r^2\hat{\mathbf{z}}. \tag{1}$$

Dada una curva Γ mostrada en la Figura 1 se le pide calcular el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ en Γ usando

(a) Integrales de camino

(b) Teorema de Stokes

Discuta sobre la validez de lo calculado en (b).

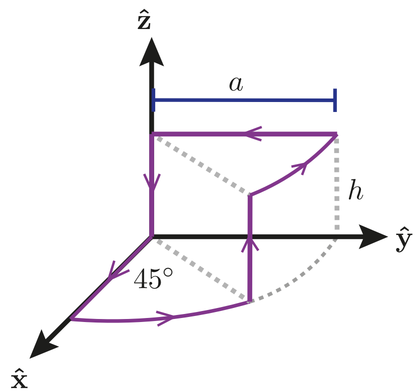

Figure 1: Curva Γ

Solución:

Clase N° 5, pags. 4-7.

P2. Considere la superficie S dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se puede expresar en coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^3}{3}\hat{\mathbf{z}}. \tag{2}$$

Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ sobre S usando

(a) Integral de flujo

(b) Teorema de la divergencia

Solución:

La superficie S corresponde a la superficie de una esfera de radio R, y por lo tanto se puede parametrizar con los ángulos ϕ y θ de coordenadas esféricas. En ese caso se cumple que $d\mathbf{S} = R^2 \sin\phi d\phi d\theta \hat{\mathbf{r}}$. Por otra parte, el campo $\mathbf{F}$ se expresa en coordenadas esféricas como

$$\mathbf{F}(r,\phi,\theta) = \frac{r^3\cos^3\phi}{3}(\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}). \tag{3}$$

Al hacer el producto punto entre $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{S}$ es importante evaluar el campo $\mathbf{F}$ en la superficie, esto es, $r = R$. De esta forma se obtiene

$$\mathbf{F}(r=R,\phi,\theta)\cdot d\mathbf{S} = \frac{R^5\cos^4\phi\sin\phi}{3}\,d\phi\,d\theta. \tag{4}$$

Por último, considerando que el rango de los ángulos en coordenadas esféricas está dado por $\phi \in [0,\pi]$ y $\theta \in [0,2\pi)$, la integral de flujo será

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int \frac{R^5}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^4\phi\,\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \frac{4\pi R^5}{15}. \tag{5}$$

Para usar el teorema de la divergencia hace falta calcular la divergencia del campo $\mathbf{F}$. Usando la Ec. (2) se obtiene directamente $\nabla\cdot\mathbf{F} = z^2$. Este último resultado se expresa en coordenadas esféricas como

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(r,\phi,\theta) = r^2\cos^2\phi. \tag{6}$$

El volumen que encierra la superficie S es una esfera de radio R, por lo tanto $r \in [0,R]$, $\phi \in [0,\pi]$ y $\theta \in [0,2\pi)$. Por otra parte, $dV = r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$, y entonces se obtiene

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4\cos\phi\,\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta = \frac{4\pi R^5}{15}. \tag{7}$$

Comentarios finales sobre la aplicabilidad del teorema de la divergencia, es que en este caso se cumple que la superficie S es regular por pedazos, y que el campo $\mathbf{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ tanto en el interior de la superficie cerrada S como en la superficie misma. De aquí se tiene que el teorema de la divergencia es válido, y es la razón por la cual se obtiene el mismo resultados por ámbos procedimientos.

P3. Considere un campo vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es siempre perpendicular a una curva regular γ de longitud $\ell < \infty$. Pruebe que se cumple

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{8}$$

Suponiendo que se cumple $\|\mathbf{F}\| \leq M$ sobre cualquier punto de la curva γ, con $M \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$\left\| \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right\| \leq M\ell. \tag{9}$$

Solución:

Suponiendo t una parametrización regular de la curva γ, y caracterizando los puntos extremos de la curva como t_i y t_f, se cumple

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_i}^{t_f} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt. \tag{10}$$

Por otra parte, se cumple que $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es tangencial a la curva en todo el dominio, y dado que $\mathbf{F}$ es siempre perpendicular a la curva γ, es cierto que

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0. \tag{11}$$

En virtud de la Ec. (10) y la Ec. (11) se concluye la Ec. (8). En virtud del teorema [1], es cierto que

$$\left\| \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right\| \leq \int_\gamma \|\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\|. \tag{12}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Shwartz, se cumple también con la desigualdad

$$\int_\gamma \|\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\| \leq \int_\gamma \|\mathbf{F}\| \|d\mathbf{r}\|. \tag{13}$$

Por último, dado que $\|\mathbf{F}\| \leq M$, se obtiene

$$\int_\gamma \|\mathbf{F}\| \|d\mathbf{r}\| \leq M \int_\gamma \|d\mathbf{r}\|. \tag{14}$$

Observando que la integral del miembro derecho en la Ec. (14) es el largo de la curva, y en virtud de las Ecs. (12), (13), (14), se cumle la Ec. (9)

P4. Considere el campo vectorial cuya expresión en coordenadas esféricas está dada por

$$\mathbf{F} = r^2 \hat{\mathbf{r}} + r\theta \sin^3 \phi \hat{\theta}. \tag{15}$$

Calcule la divergencia de $\mathbf{F}$.

Solución:

Clase N° 5, pag. 10.

P5. Considere la curva Γ formada por la interección de las superficies S_1 y S_2, las cuales están descritas respectivamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule el trabajo que efectúa un campo vectorial cuya expresión en coordenadas cilíncricas está dada por $\mathbf{F} = (r - z)\hat{\mathbf{r}} + z\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{z^4\phi^2}{r}\hat{\mathbf{z}}$ y caracterice el dominio del campo $\mathbf{F}$.

Solución:

Clase N° 5, pags. 8-9.

References

[1] Absolute Value of Definite Integral. Proof