

Auxiliar 4

Profesor: Juvenal Letelier

Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que en coordenadas cilíndricas está dado por la expresión

$$\mathbf{F}(r, \phi, z) = zr\hat{\mathbf{r}} + r^2\hat{\mathbf{z}}. \quad (1)$$

Dada una curva Γ mostrada en la Figura 1 se le pide calcular el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ en Γ usando

- (a) Integrales de camino
- (b) Teorema de Stokes

Discuta sobre la validez de lo calculado en (b).

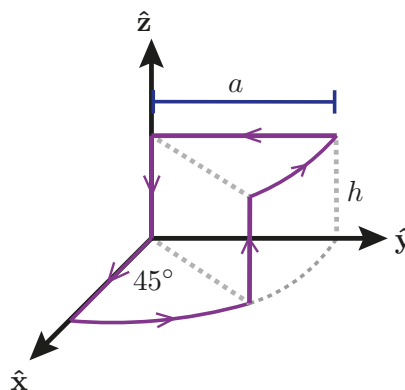


Figure 1: Curva Γ

P2. Considere la superficie S dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se puede expresar en coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^3}{3}\hat{\mathbf{z}}. \quad (2)$$

Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ sobre S usando

- (a) Integral de flujo
- (b) Teorema de la divergencia

P3. Considere un campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es siempre perpendicular a una curva regular γ de longitud $\ell < \infty$. Pruebe que se cumple

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3)$$

Suponiendo que se cumple $\|\mathbf{F}\| \leq M$ sobre cualquier punto de la curva γ , con $M \in \mathbb{R}$, demuestre que

$$\left\| \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right\| \leq M\ell. \quad (4)$$

P4. Considere el campo vectorial cuya expresión en coordenadas esféricas está dada por

$$\mathbf{F} = r^2 \hat{\mathbf{r}} + r\theta \sin^3 \phi \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (5)$$

Calcule la divergencia de $\mathbf{F}$.

P5. Considere la curva Γ formada por la intersección de las superficies S_1 y S_2 , las cuales están descritas respectivamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule el trabajo que efectúa un campo vectorial cuya expresión en coordenadas cilíndricas está dada por $\mathbf{F} = (r - z)\hat{\mathbf{r}} + z\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{z^4\phi^2}{r}\hat{\mathbf{z}}$ y caracterice el dominio del campo $\mathbf{F}$.