Auxiliar 3

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere los campos vectoriales $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cada uno de clase C^2, y los campos escalares $\psi, \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ también de clase C^2. Demuestre las siguientes identidades

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi \mathbf{F}) = \psi \boldsymbol{\nabla} \cdot F + (\boldsymbol{\nabla} \psi) \cdot \mathbf{F}$

(b) $\nabla^2(\psi\varphi) = \psi \nabla^2 \varphi + \varphi \nabla^2 \psi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi$

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

(d) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0$

Solución:

Considerando la definición de divergencia en notación tensorial y luego expandiendo el producto de derivadas se obtiene

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi F_i) = F_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial F_i}{\partial x_i}. \tag{1}$$

De este resultado se puede identificar que el primer miembro corresponde al producto punto entre $\mathbf{F}$ y $\nabla\psi$. Por otra parte, el segundo miembro del resultado es la multiplicación del campo ψ por la divergencia del campo vectorial $\mathbf{F}$, concluyendo así la parte (a).

Considerando la definición del Laplaciano en notación tensorial, y expandiendo las derivadas, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) = \psi \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Reordenando y reconociendo las estructuras de producto punto y Laplaciano en cada caso se obtiene directamente el apartado (b).

Considerando el tensor de Levi-Civita para el producto curz de vectores, y expandiendo el el término izquierdo de la identidad (c), se obtiene

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \varepsilon_{ijk} F_i G_j \hat{\mathbf{e}}_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k}(F_i G_j) = \varepsilon_{ijk}\left(F_i \frac{\partial G_j}{\partial x_k} + G_j \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right). \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$ y $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ se pueden reconocer las estructuras de producto cruz, y entonces se deduce

$$-\varepsilon_{kji}\left(\frac{\partial G_j}{\partial x_k}\right) F_i + \varepsilon_{kij}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right) G_j, \tag{4}$$

desde dónde es posible obtener la identidad planteada en (c).

Al expandir el miembro izquierdo de la identidad mostrada en el apartado (e) se obtiene la expresión

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_i}. \tag{5}$$

Considerando que $\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_k}$, y además $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$ se cancelan términos de a pares y por lo tanto el resultado es nulo, concluyendo así la identidad (d).

P2. Las ecuaciones de Euler son muy importantes en ingeniería debido a que estas describen muchos fenómenos relacionados a la mecánica de fluidos. Dichas ecuaciones relacionan el campo vectorial de velocidades $\mathbf{u} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con los campos escalares densidad de masa y presión $\rho, p : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y se expresan típicamente como

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \right] = -\boldsymbol{\nabla} p - \rho g \hat{\mathbf{z}}, \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{6b}$$

en dónde g es la aceleración de gravedad. Considerando un flujo estacionario ($\partial_t \mathbf{u} = 0$), y suponiendo un flujo irrotacional, demuestre que se cumple el principio de Bernoulli dado por

$$\frac{1}{2}\rho \|\mathbf{u}\|^2 + \rho g z + p = C, \tag{7}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Solución:

Considerando la identidad vista en la guía 1, se sabe que para un campo vectorial $\mathbf{u} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se satisface

$$\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \|\mathbf{u}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}. \tag{8}$$

Considerando que el flujo es irrotacional, se tiene $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} = 0$, y por lo tanto al reemplazar la identidad (8) en la Ec. (6a) se obtiene

$$\rho \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \|\mathbf{u}\|^2 + \boldsymbol{\nabla} p + \rho g \hat{\mathbf{z}} = 0. \tag{9}$$

Notando que $\boldsymbol{\nabla} \phi = \rho g \hat{\mathbf{z}}$ se cumple si y solo si $\phi = \rho g z + K_1$, $K_1 \in \mathbb{R}$, se puede deducir

$$\boldsymbol{\nabla} \left[\frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2 + p + \rho g z + K_1 \right] = 0. \tag{10}$$

Por último, notando que $0 = \nabla K_2$, $K_2 \in \mathbb{R}$, y fijando $C = K_2 - K_1$, se obtiene directamente lo pedido.