Auxiliar 3

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere los campos vectoriales $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cada uno de clase C^2, y los campos escalares $\psi, \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ también de clase C^2. Demuestre las siguientes identidades

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi \mathbf{F}) = \psi \boldsymbol{\nabla} \cdot F + (\boldsymbol{\nabla} \psi)\mathbf{F}$

(b) $\nabla^2(\psi\varphi) = \psi\nabla^2\varphi + \varphi\nabla^2\psi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi$

(c) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

(d) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) = 0$

P2. Las ecuaciones de Euler son muy importantes en ingeniería debido a que estas describen muchos fenómenos relacionados a la mecánica de fluidos. Dichas ecuaciones relacionan el campo vectorial de velocidades $\mathbf{u} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con los campos escalares densidad de masa y presión $\rho, p : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y se expresan típicamente como

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} \right] = -\boldsymbol{\nabla} p - \rho g \hat{\mathbf{z}}, \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1b}$$

en dónde g es la aceleración de gravedad. Considerando un flujo estacionario ($\partial_t \mathbf{u} = 0$), y suponiendo un flujo irrotacional, demuestre que se cumple el principio de Bernoulli dado por

$$\frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2 + \rho g z + p = C, \tag{2}$$

con $C \in \mathbb{R}$.